TD 6: Tableaux / Pointeurs

Yahia SALHI

Inversion de matrices

Le but de cet exercice est d'implémenter un programme permettant d'inverser une matrice $\mathbf{A}$, où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée $(n \times n)$. Cela revient à résoudre les n systèmes $\mathbf{A} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i$ pour i allant de 1 à n. Pour cela, on crée un tableau à n lignes et $2 \times n$ colonnes en bordant la matrice $\mathbf{A}$ par la matrice identité $\mathbf{I}_n$. Ainsi, pour inverser la matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ de format (n, n), on utilisera la matrice augmentée $(n, 2 \times n)$ suivante :

$$\big(\mathbf{A}\big|\mathbf{I}_n\big) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{n,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Nous utilisons la méthode *Gauss-Jordan* qui consiste à transformer ce système en un système équivalent dont le bloc gauche est l'identité, c'est-à-dire qu'il faut modifier la matrice $\big(\mathbf{A}\big|\mathbf{I}_n\big)$ pour qu'elle devienne de la forme $\big(\mathbf{I}_n\big|\mathbf{A}^{-1}\big)$.

En notant :
- $l_i^{(k)}$ la ligne i de la matrice $\mathbf{A}$ à l'itération k
- $a_{i,j}^{(k)}$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice $\mathbf{A}$ à l'itération k,

alors l'algorithme de *Gauss-Jordan* est le suivant :

```
Pour k allant de 1 à n
    s'il existe une ligne i ≥ k telle que a_ik^(k-1) ≠ 0
        échanger cette ligne i et la ligne k : l_i ↔ l_k
        l_k^(k) ← (1 / a_{k,k}^(k-1)) l_k^(k-1)
        Pour i allant de 1 à n et i ≠ k
        l_i^k ← l_i^(k-1) − a_{i,k}^(k-1) × l_k^(k)
    sinon A n'est pas inversible
```

Pour k allant de 1 à n
    s'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{ik}^{(k-1)} \neq 0$
        échanger cette ligne i et la ligne k : $l_i \leftrightarrow l_k$
        $l_k^{(k)} \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{(k-1)}} l_k^{(k-1)}$
        Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$
        $l_i^k \leftarrow l_i^{(k-1)} - a_{i,k}^{(k-1)} \times l_k^{(k)}$
    sinon $\mathbf{A}$ n'est pas inversible

Utiliser cet algorithme pour construire une fonction `inverse` qui prend une matrice en argument et renvoi son inverse.

Pour cela nous utiliserons les *pointeurs* multidimensionnels ainsi que la fonction `malloc`. Enfin, tester la fonction.