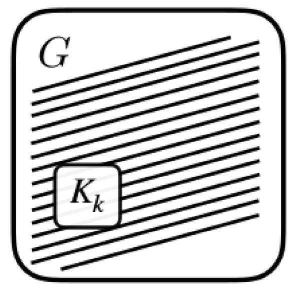
Gráficas balanceables

Antoine Dailly & Adriana Hansberg & Denae Ventura

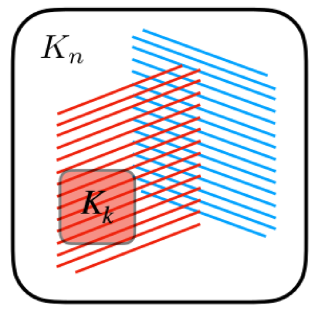
Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla

Dos filosofías

Teorema de Turán. (1941) Si G iene orden n y más de $ex(n,H)$ aristas, entonces G tiene a H como subgráfica.



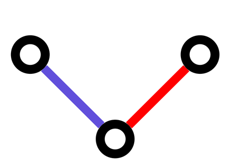
Teorema de Ramsey. (1928) Existe un entero R tal que si $n \geq R$, en toda bicoloración $f: E(K_n) \to \{r, a\}$ contiene una K_k, ya sea roja o azul.



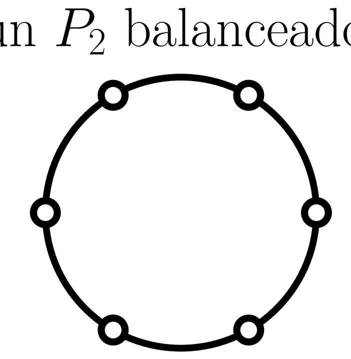
Definiciones

Defnición. Para una gráfica dada G, una 2-coloración $f: E(K_n) \to \{r, a\}$ contiene una gráfica G *balanceada* si f produce una copia de G con la mitad de las aristas rojas y la otra mitad azules.
Definición. Para una gráfica G, sea $bal(n,G)$ el mínimo entero, si existe, tal que toda 2-coloración $f: E(K_n) \to \{r, a\}$ con $\min\{e(R), e(B)\} > bal(n,G)$ contiene una copia balanceada de G.
Definición. Si $bal(n,G)$ existe para n suficientemente grande, decimos que G es *balanceable.*

Ejemplos



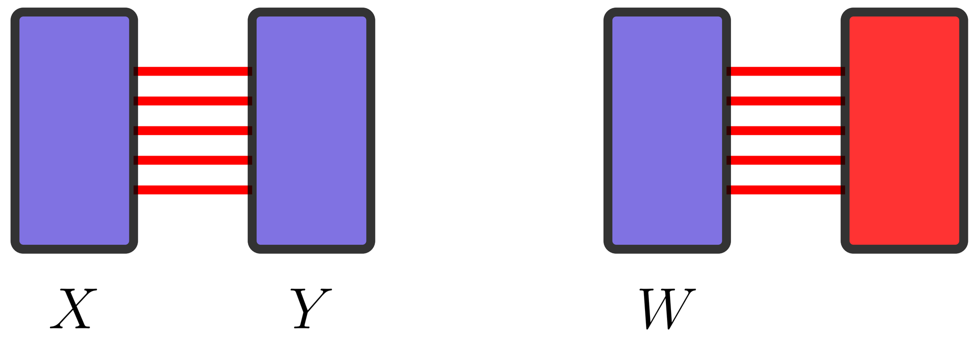
P_2 es balanceable porque toda 2-coloración de $E(K_n)$ (usando ambos colores) para $n > 2$ produce un P_2 balanceado.



C_6 no es balanceable, y veremos el contraejemplo más adelante.

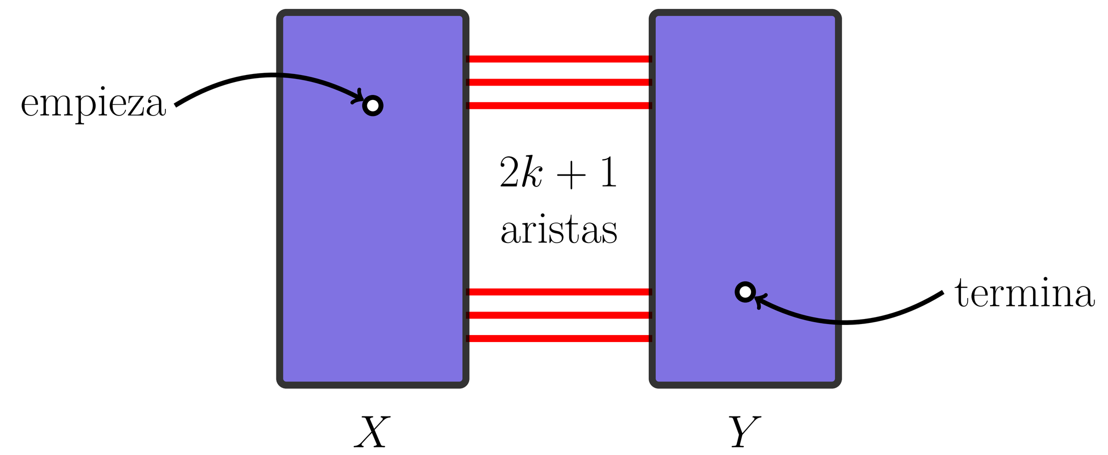
Caracterización

Teorema 1. Caro, Hansberg, Montejano, 2019. Sea t un entero positivo. Entonces para toda n suficientemente grande existe un entero positivo $m = m(t)$ y un número $\varphi(n,t) = \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m}})$ tal que toda coloración $f: E(K_n) \to \{r, a\}$ con $min\{e(R), e(B)\} > \varphi(n,t)$ contiene una copia coloreada de K_{2t} de tipo A o de tipo B.



Corolario. Caro, Hansberg, Montejano, 2019. Una gráfica G es balanceable **si y sólo si** existe una partición $V = X \cup Y$ y un conjunto $W \subseteq V$ tal que $e(X,Y) = e(W) = \frac{e(G)}{2}$.

Demostración. Encajamos a C_{4k+2} en la estructura de tipo A del teorema 1 que aparece para un número infinito de n's:



$\Rightarrow$ Imposible cerrar el ciclo

Ejemplo. Por el ejemplo anterior, $\mathrm{bal}(n, C_4) \geq 1$.

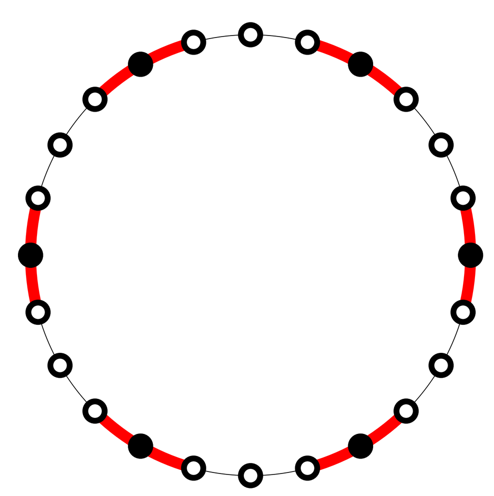
Teorema. $\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq 4nk$.

Buscamos garantizar la existencia de estructuras balanceadas en gráficas completas muy grandes.

Balanceabilidad

Proposición. Si existe un conjunto independiente I tal que $\sum_{v \in I} d(v) = \frac{e(G)}{2}$, entonces G es balanceable.
Demostración. Usamos la caracterización anterior, donde $X := I$ y $W = V \setminus I$.
Aplicación. Ciclo C_{4k}

Los vértices en I están resaltados en negro:



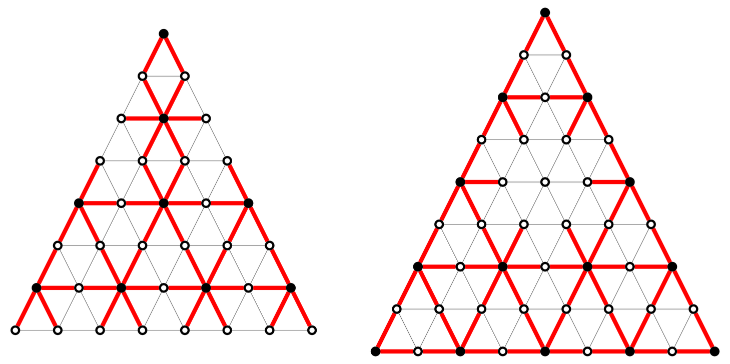
Observación. C_{4k+2} no es balanceable.

Otros resultados

Encontramos la balanceabilidad de todas las gráficas circulantes y de rejas triangulares.
Teorema Sean k, ℓ dos enteros tales que $k > 3$ y $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. La gráfica circulante $C_{k,\ell}$ es balanceable en los siguientes casos:

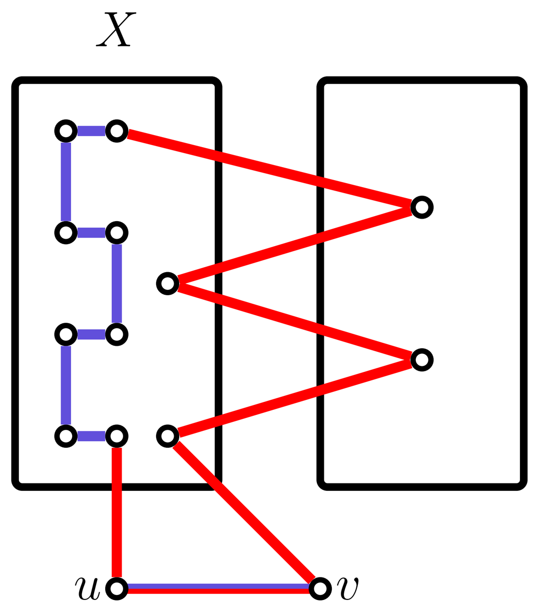
- Si $k \equiv 0 \mod 4$;
- Si $k \equiv 2 \mod 4$ and $\ell \neq \frac{k}{2}$, and if $(k,\ell) \neq (6,2)$.

Para los casos restantes, $C_{k,\ell}$ no es balanceable.
Teorema Sea h un entero positivo.La reja triangular T_h es balanceable si y sólo si $h \mod 8 \in \{0, 1\}$
Applicación. Reja triangular T_h



Aristas Bicoloreadas

Definición. En una 2-coloración de las aristas de K_n, las aristas son la unión de dos conjuntos R y B. Ahora permitimos que las aristas sean **de ambos colores** R y B. Las aristas en $R \cap B$ se llaman *bicoloreadas.* La definición de número de balanceo no cambia, pero ahora **toda gráfica es balanceable**.
Teorema. $\mathrm{bal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$.
Demostración (bosquejo). Como C_{4k+2} no es balanceable, sabemos que $\mathrm{bal}(n, C_{4k+2}) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Supongamos que tenemos una 2-coloración de las aristas de K_n con $\frac{1}{2}\binom{n}{2}+1$ aristas azules y $\frac{1}{2}\binom{n}{2}+1$ aristas rojas. El teorema 1 asegura que existe una copia de K_{2t} en la forma del tipo A o tipo B. Como n es suficientemente grande, tenemos que $t \geq 2k+1$. La demostración se divide en casos dependiendo de donde se puede encontrar la arista bicoloreada uv. Sin importar donde se encuentra uv, podemos encontrar un C_{4k+2} balanceado. Por ejemplo:



Todas las aristas uX y vX son rojas.

Los casos restantes son similares.

Referencias

[1] Y. Caro, A. Hansberg, and A. Montejano, "Unavoidable chromatic patterns in 2-colorings of the complete graph. arxiv e-prints, page," *arXiv preprint arXiv:1810.12375*, 2019.

[2] A. Dailly, A. Hansberg, and D. Ventura, "On the balanceability of some graph classes.," *Preprint*, 2019.

[3] A. Dailly, A. Hansberg, and D. Ventura, "On the balancing number of some graphs classes.," *Preprint*, 2019.