

Équilibrabilité

Antoine Dailly
Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla

Travaux effectués en collaboration avec
Laura Eslava, Adriana Hansberg et Denae Ventura.



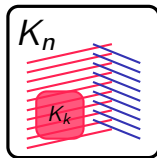
Contexte : théorie de Ramsey

Principe

Garantir des sous-structures ordonnées au sein de grandes structures chaotiques.

Théorème de Ramsey (pour la 2-coloration) (1930)

Pour tout k , il existe un entier $R(k)$ tel que, si $n \geq R(k)$, alors toute 2-coloration des arêtes de K_n contient un K_k monochromatique.



Contexte : théorie des graphes extrémaux

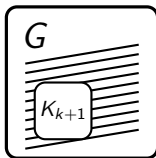
Principe

Déterminer la densité minimale garantissant une certaine propriété, et les graphes les plus denses ne la vérifiant pas.

Théorème de Turán (1941)

Si G d'ordre n contient strictement plus de $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$ arêtes, alors G contient un K_{k+1} .

Le graphe extrémal est le graphe k -parti complet équilibré d'ordre n .



Notations pour la suite

- ▶ On considère des 2-colorations des arêtes de K_n :
 $E(K_n) = R \sqcup B$.
- ▶ On note $ex(n, G)$ le nombre d'arêtes maximal dans un graphe d'ordre n sans G .

Notations pour la suite

- ▶ On considère des 2-colorations des arêtes de K_n :
 $E(K_n) = R \sqcup B$.
- ▶ On note $ex(n, G)$ le nombre d'arêtes maximal dans un graphe d'ordre n sans G .

Objectif : généraliser l'idée de Ramsey et chercher d'autres motifs inévitables que les copies monochromatiques.

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

On cherche à **garantir** l'existence d'une (r, b) -copie de G
(pour $r > 0$ donné).

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

On cherche à **garantir** l'existence d'une (r, b) -copie de G
(pour $r > 0$ donné).

⇒ Besoin d'une certaine **densité de chaque classe de couleur**.

r -tonalité

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

On cherche à **garantir** l'existence d'une (r, b) -copie de G
(pour $r > 0$ donné).

⇒ Besoin d'une certaine **densité de chaque classe de couleur**.

r -tonalité

Si, pour tout n suffisamment grand, il existe un $k(n, r)$ tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n avec $|R|, |B| > k(n, r)$ contient une (r, b) -copie de G , alors G est **r -tonal**.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\text{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit équilibrable

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\text{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit **équilibrable** et $\text{bal}(n, G)$ est appelé son **nombre d'équilibrage**.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\text{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit **équilibrable** et $\text{bal}(n, G)$ est appelé son **nombre d'équilibrage**.

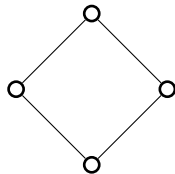
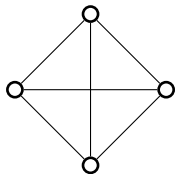
Problème type Ramsey

Problème type extrémal

Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

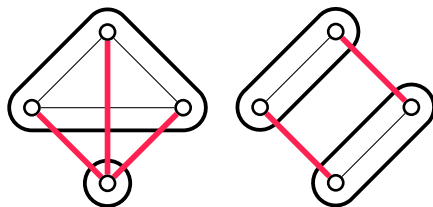


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;

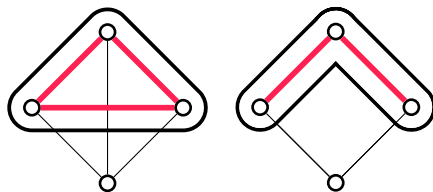


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

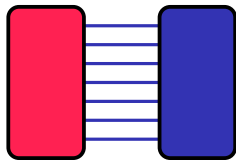
1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.



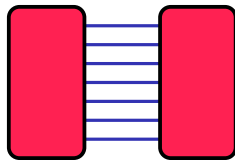
Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable \Rightarrow

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



type A

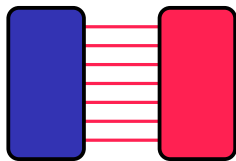


type B

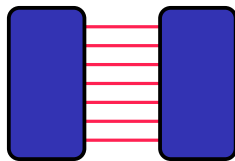
Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable \Rightarrow

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



type A

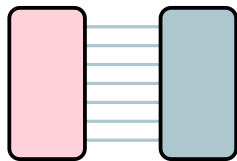


type B

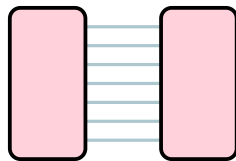
Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable \Rightarrow

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



type A

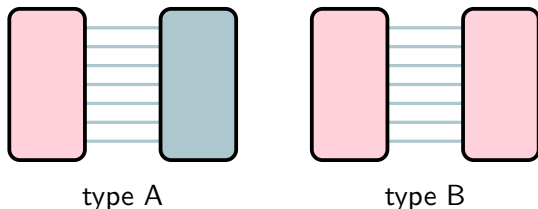


type B

Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable \Rightarrow

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



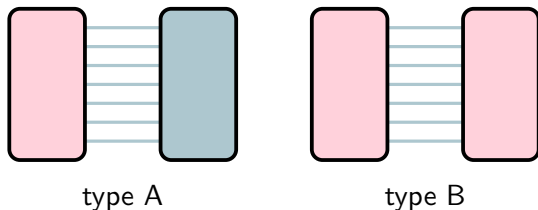
Ces deux colorations spéciales de K_n peuvent être équilibrées ($|R| = |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$) pour une infinité de valeurs de n .

Preuve de la caractérisation (2)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .

Également montré (mais avec une borne de $\epsilon\binom{n}{2}$) par Cutler et Montágh (2008) et Fox et Sudakov (2008).

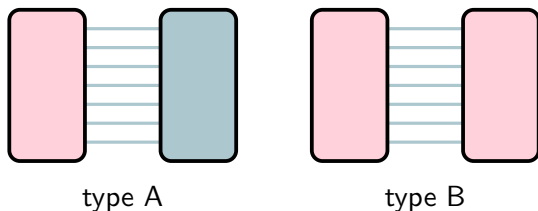


Preuve de la caractérisation (2)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .

Également montré (mais avec une borne de $\epsilon\binom{n}{2}$) par Cutler et Montágh (2008) et Fox et Sudakov (2008).



\Rightarrow Donne une borne subquadratique pour $\text{bal}(n, G)$

Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .

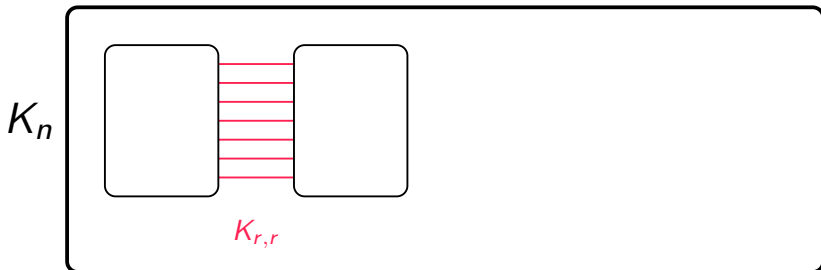
K_n



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

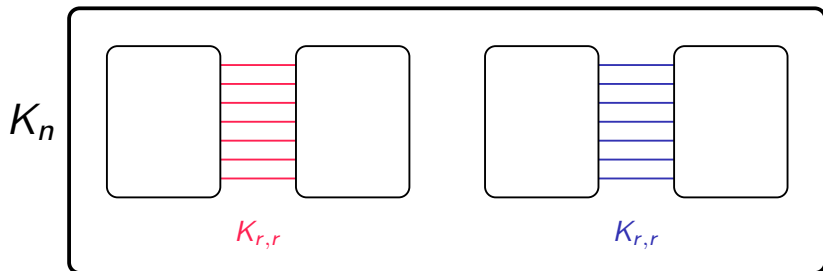
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

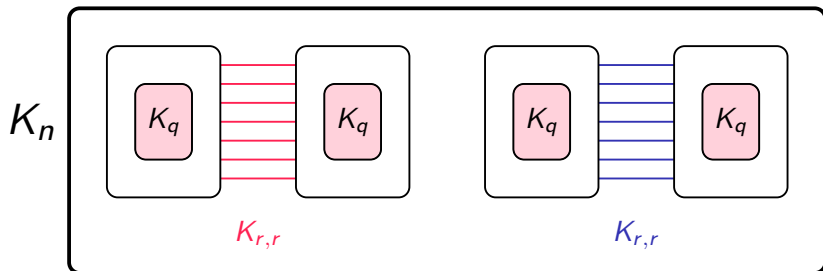
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

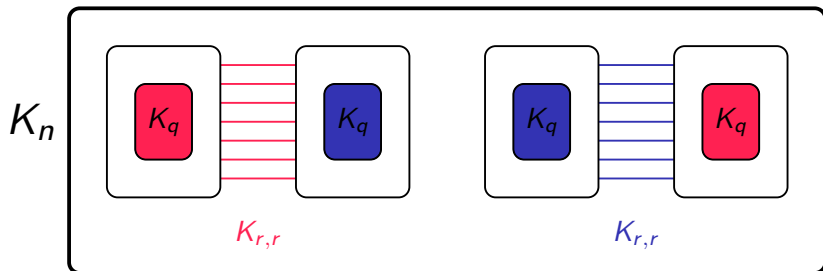
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

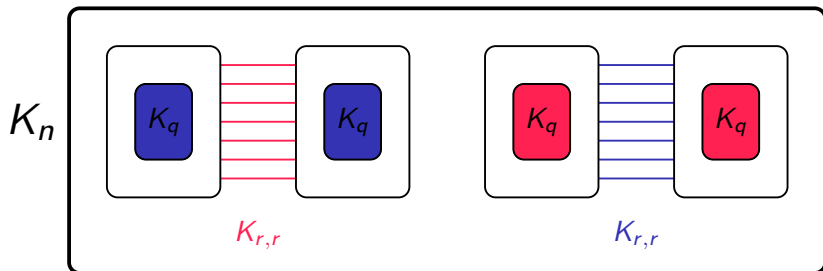
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

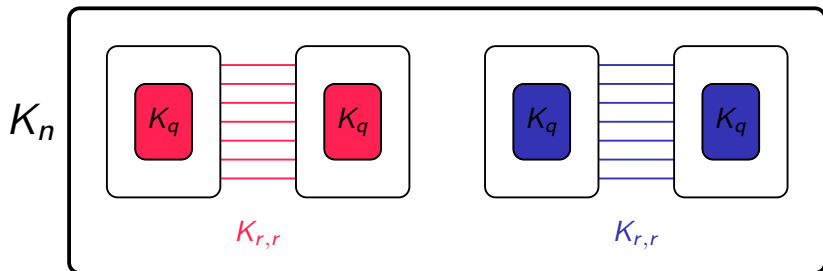
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

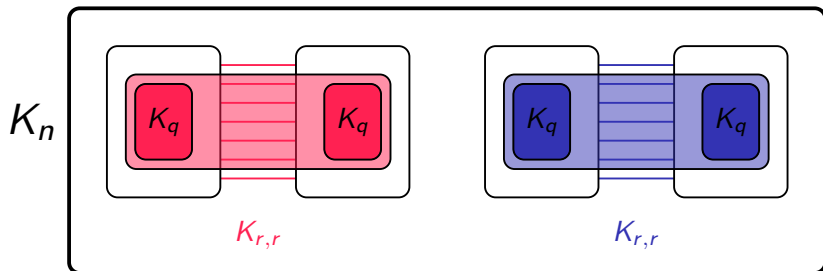
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

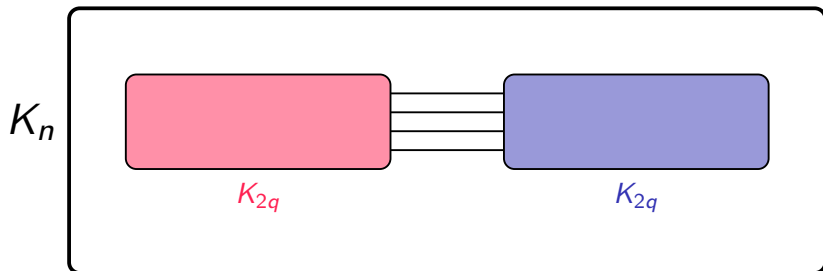
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

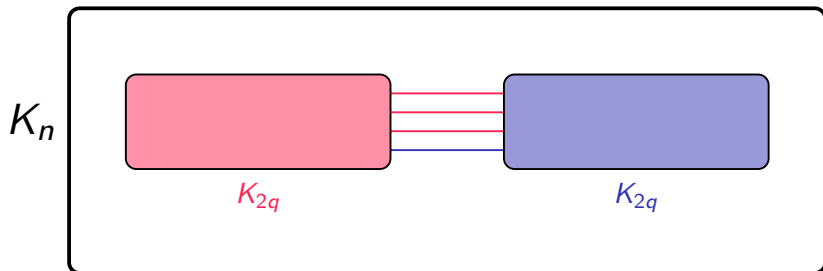
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

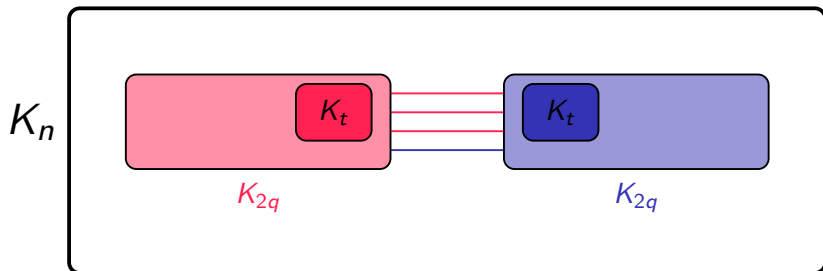
Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t , il existe $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \pmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !

Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
 - ▶ Les arbres sont équilibrables
Pour $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, T_k) \leq (k - 1)n$
 - ▶ Pour k pair et $n \geq \max(3, \frac{k^2}{4} + 1)$,
 $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \text{bal}(n, K_{1,k+1}) = (\frac{k-2}{2})n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
 - ▶ Pour $n \geq \frac{9}{32}k^2 + \frac{1}{4}k + 1$,
 $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k - 1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k - 1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
⚠ P_k désigne le chemin sur k arêtes (désolé 😊)

Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
 - ▶ Les arbres sont équilibrables
Pour $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, T_k) \leq (k - 1)n$
 - ▶ Pour k pair et $n \geq \max(3, \frac{k^2}{4} + 1)$,
 $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \text{bal}(n, K_{1,k+1}) = (\frac{k-2}{2})n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
 - ▶ Pour $n \geq \frac{9}{32}k^2 + \frac{1}{4}k + 1$,
 $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k - 1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k - 1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
⚠ P_k désigne le chemin sur k arêtes (désolé 😊)
- ▶ Caro, Lauri, Zarb (2020)
 - ▶ Nombres d'équilibrage des graphes sur au plus 4 arêtes

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- ▶ C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- ▶ $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable
- ▶ C_{4k} est équilibrable

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- ▶ C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- ▶ $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et
 $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;
- ▶ C_{4k} est équilibrable

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- ▶ C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- ▶ $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;
- ▶ C_{4k} est équilibrable, et $(k-1)n - (k-1)^2 \leq \text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$.

Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

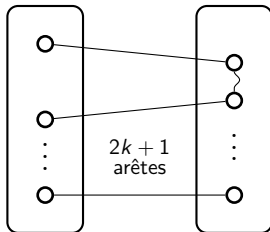
Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

C_{4k+2} a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



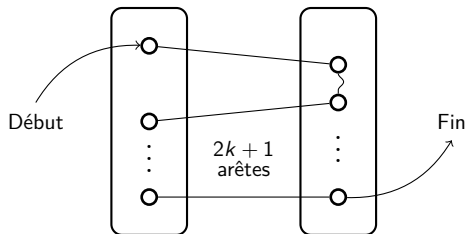
Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

C_{4k+2} a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

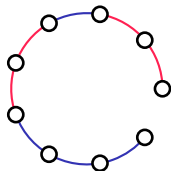
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré \Rightarrow
 $2k$ arêtes de chaque couleur

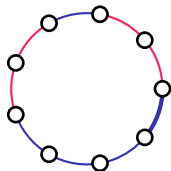
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré \Rightarrow
2k arêtes de chaque couleur

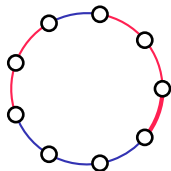
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré \Rightarrow
 $2k$ arêtes de chaque couleur

On peut refermer le cycle
qui sera équilibré

Cycles impairs

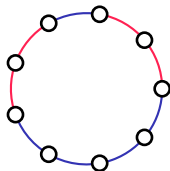
Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré \Rightarrow
Une couleur avec $2k+1$ arêtes



Cycles impairs

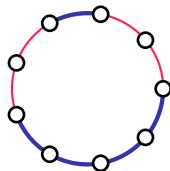
Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré \Rightarrow
Une couleur avec $2k+1$ arêtes



Cycles impairs

Proposition

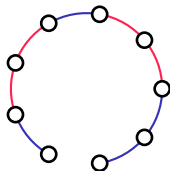
Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré \Rightarrow
Une couleur avec $2k+1$ arêtes

En retirer une donne
un P_{4k} équilibré



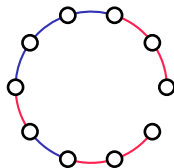
Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

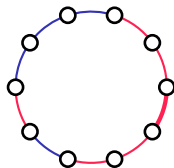
P_{4k-1} équilibré



Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

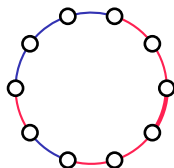
P_{4k-1} équilibré
 \Rightarrow Cycle potentiellement
non-équilibré



Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

P_{4k-1} équilibré
 \Rightarrow Cycle potentiellement
non-équilibré



Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$,

$$(k-1)n - (k-1)^2 \leq \text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$$

Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.

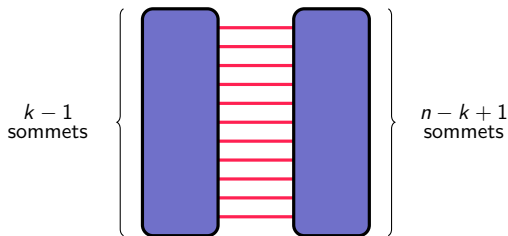
Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.



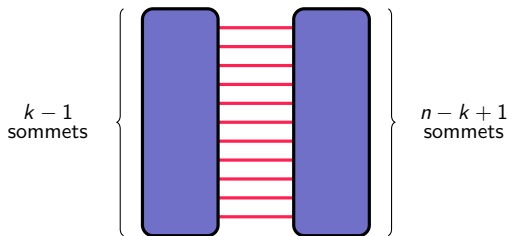
Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.



\Rightarrow Un cycle ne peut avoir qu'au plus $2k - 2$ arêtes dans R .

Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

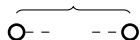
Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

$|R|, |B| > \text{bal}(n, P_{4k-2}) \Rightarrow$ Il y a un P_{4k-2} équilibré.

$4k - 1$ sommets



Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

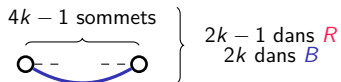
Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

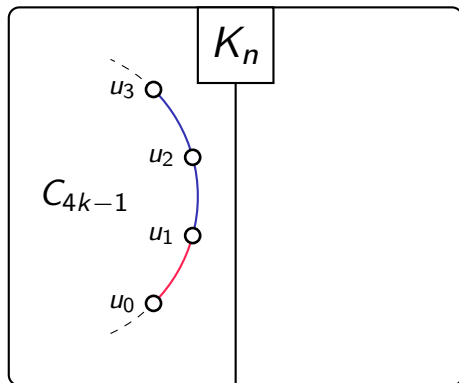
$|R|, |B| > \text{bal}(n, P_{4k-2}) \Rightarrow$ Il y a un P_{4k-2} équilibré.

\Rightarrow On le ferme avec (wlog) une B



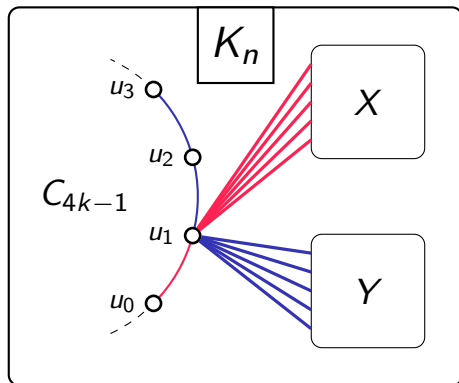
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



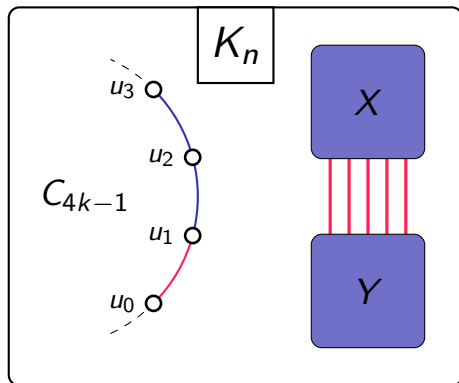
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

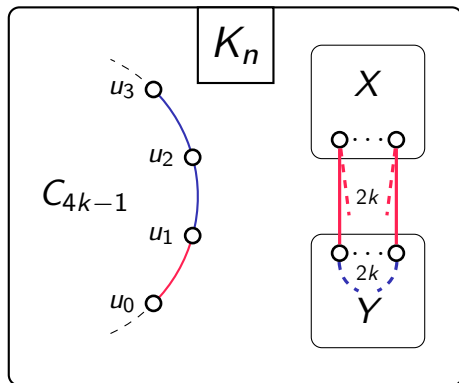
Preuve par contradiction (suite)



Des lemmes forcent les couleurs de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(X, Y)$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

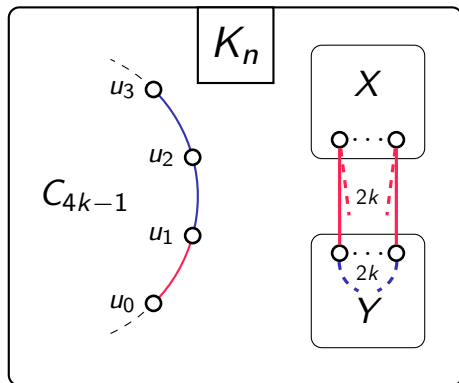
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir $|X|, |Y| \geq k$

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

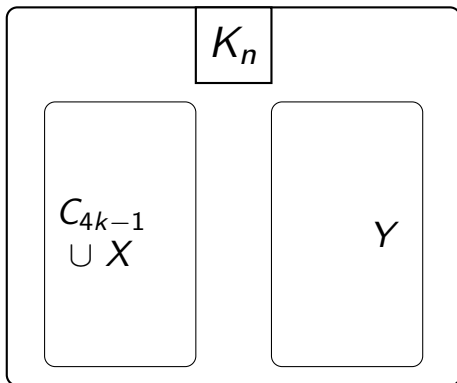
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir $|X|, |Y| \geq k \Rightarrow$ wlog, supposons $|X| < k$

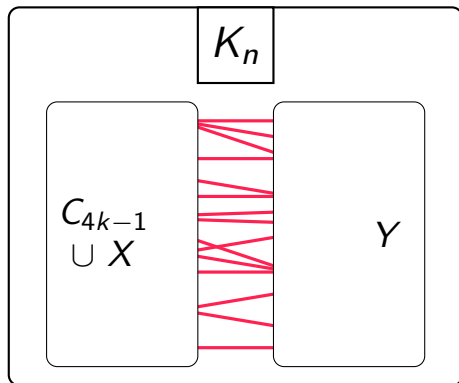
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

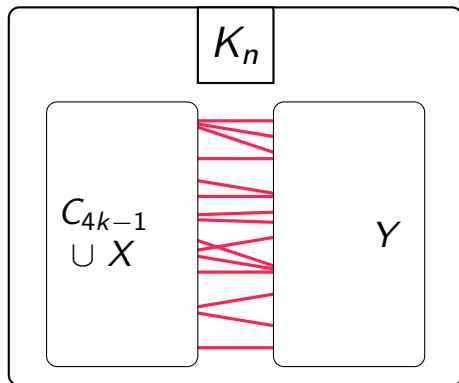
Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

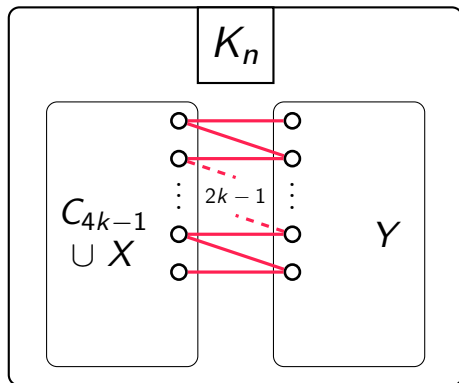


Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $\text{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13]

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

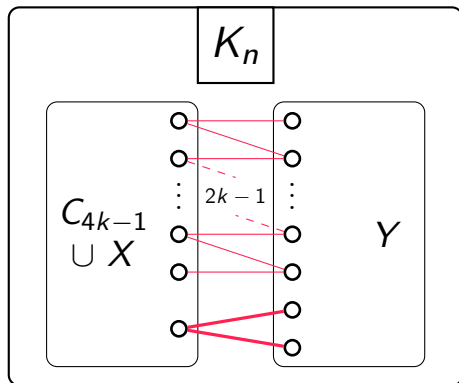


Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $ex(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] \Rightarrow Il contient un P_{2k-1} .

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



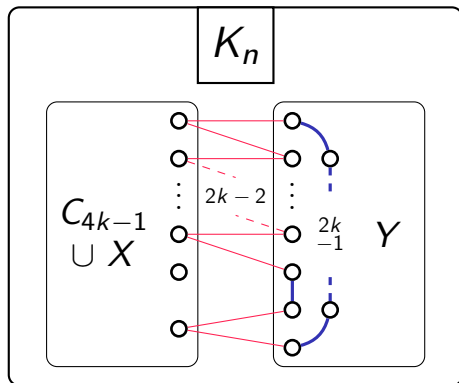
Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $ex(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] \Rightarrow Il contient un P_{2k-1} .

Il reste suffisamment d'arêtes dans R pour avoir un $K_{1,2}$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $ex(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] \Rightarrow Il contient un P_{2k-1} .

Il reste suffisamment d'arêtes dans R pour avoir un $K_{1,2}$.

On complète avec des arêtes dans Y , qui seront dans B , et on obtient un C_{4k} équilibré.

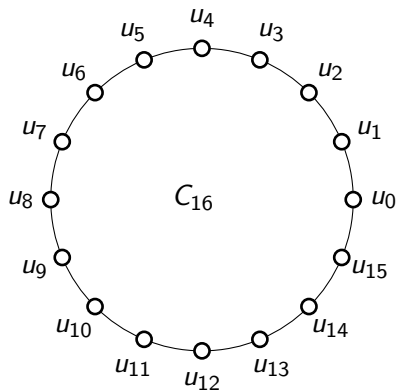
\Rightarrow Contradiction

Circulants $C_{k,l}$

Circulants $C_{k,l}$

Définition

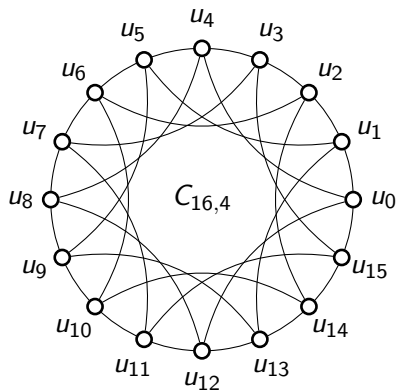
$C_{k,l}$ est un cycle C_k



Circulants $C_{k,l}$

Définition

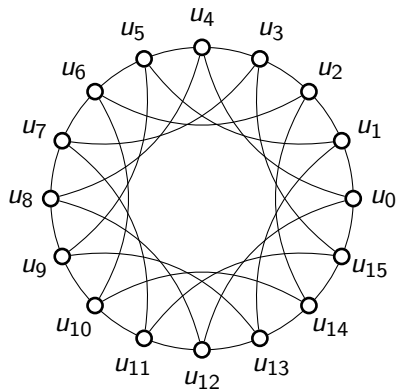
$C_{k,l}$ est un cycle C_k avec les cordes $u_i u_{i+l}$.



Circulants $C_{k,l}$

Définition

$C_{k,l}$ est un cycle C_k avec les cordes $u_i u_{i+l}$.



Contient les antiprismes et les échelles de Möbius.

Circulants $C_{k,l}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $l \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,l}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, l) \neq (6, 2)$.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

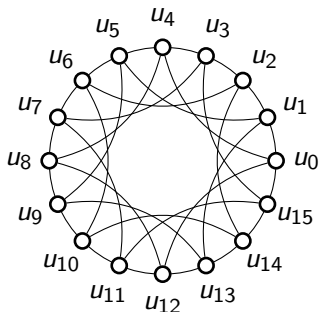
Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.



Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

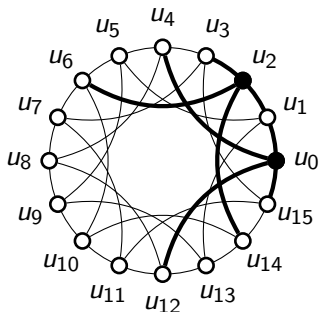
Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.



Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

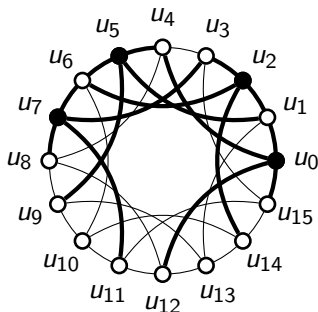
Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k est pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas! Chaque fois, on exploite la caractérisation.


Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair


Proposition


Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.




Résumé

 Équilibrable

 Non-équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

Résumé

Équilibrable



valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

Non-équilibrable



bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

Circulants

K_n

K_2, K_3, K_4

$n \geq 5,$
 $\frac{n(n-1)}{2}$ pair

[Caro, Hansberg,
Montejano, 2020]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]

Cycles

Impairs

C_{4k}

C_{4k+2}

[D., Eslava, Hansberg,
Ventura, 2020+]

$C_{k,l}$

$C_{2k,l}$
dont antiprismes
et échelles de Möbius


$C_{6,2}$




$C_{2k+1,l}$


[D., Hansberg, Ventura, 2021]

Résumé

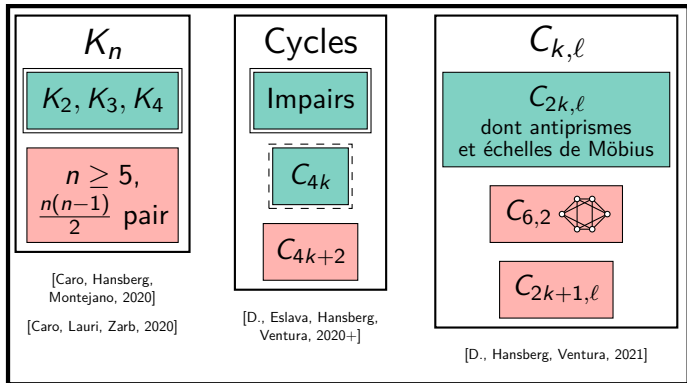
 Équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

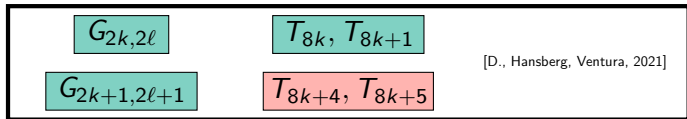
 Non-équilibrable

 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

Circulants



Grilles



Travaux en cours

- ▶ K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair

Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et

$$\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Travaux en cours

- ▶ K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair

Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et

$$\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$$

⇒ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :

1. $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$ Équilibrables
2. Autres $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$ Non-équilibrables

Travaux en cours

- ▶ K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair

Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et

$$\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$$

⇒ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :

1. $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$ Équilibrables
 2. Autres $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$ Non-équilibrables
- ▶ $2K_n$

Travaux en cours

- ▶ K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair

Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et

$$\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$$

⇒ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :

1. $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$ Équilibrables
 2. Autres $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$ Non-équilibrables
- ▶ $2K_n$
Équilibrable $\Leftrightarrow n$ est la somme de deux carrés

Graphes non-équilibrables

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

- ▶ C_{4k+2} a le sous-graphe induit, mais pas la coupe
- ▶ K_5 n'a aucun des deux

Graphes non-équilibrables

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

- ▶ C_{4k+2} a le sous-graphe induit, mais pas la coupe
- ▶ K_5 n'a aucun des deux

→ Comment différencier des « niveaux » de non-équilibrabilité ?

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant c la 2-liste-coloration, $R = \{e \mid r \in c(e)\}$ et $B = \{e \mid b \in c(e)\}$.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant c la 2-liste-coloration, $R = \{e \mid r \in c(e)\}$ et $B = \{e \mid b \in c(e)\}$.

Définition (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soit $\text{lbal}(n, G)$ le plus petit entier tel que toute 2-liste-coloration $R \cup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{lbal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

$\text{lbal}(n, G)$ est appelé le **nombre d'équilibrage de liste** de G .

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant c la 2-liste-coloration, $R = \{e \mid r \in c(e)\}$ et $B = \{e \mid b \in c(e)\}$.

Définition (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soit $\text{lbal}(n, G)$ le plus petit entier tel que toute 2-liste-coloration $R \cup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{lbal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

$\text{lbal}(n, G)$ est appelé le **nombre d'équilibrage de liste** de G .

⇒ Tous les graphes ont un nombre d'équilibrage de liste !

Premiers résultats

Proposition

Si $\text{bal}(n, G)$ existe, alors $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$.

Sinon, $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

Premiers résultats

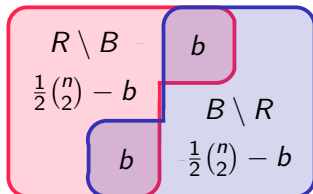
Proposition

Si $\text{bal}(n, G)$ existe, alors $|\text{bal}(n, G)| = \text{bal}(n, G)$.

Sinon, $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq |\text{bal}(n, G)| < \binom{n}{2}$.

Compter les arêtes bicolores

Si $|R|, |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} + b$:



Premiers résultats

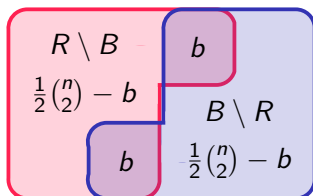
Proposition

Si $\text{bal}(n, G)$ existe, alors $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$.

Sinon, $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

Compter les arêtes bicolores

Si $|R|, |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} + b$:



$\Rightarrow 2b$ arêtes bicolores

Premiers résultats

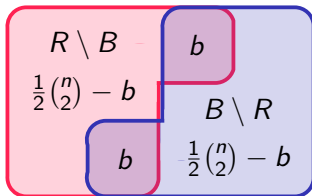
Proposition

Si $\text{bal}(n, G)$ existe, alors $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$.

Sinon, $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

Compter les arêtes bicolors

Si $|R|, |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} + b$:



$\Rightarrow 2b$ arêtes bicolors

Proposition

Si k arêtes bicolors garantissent une copie équilibrée de G , alors

$\text{lbal}(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$.

Une borne supérieure générale

$$\blacktriangleright \mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor, H \text{ sans sommet isolé} \right\}$$

Une borne supérieure générale

$$\blacktriangleright \mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor, H \text{ sans sommet isolé} \right\}$$

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tous $G(V, E)$ et $n \geq |V|$, on a

$$\text{Ibal}(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \left\lceil \frac{\text{ex}(n, \mathcal{H}(G))}{2} \right\rceil.$$

Une borne supérieure générale

$$\blacktriangleright \mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor, H \text{ sans sommet isolé} \right\}$$

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tous $G(V, E)$ et $n \geq |V|$, on a

$$\text{Ibal}(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \left\lceil \frac{\text{ex}(n, \mathcal{H}(G))}{2} \right\rceil.$$

Preuve

S'il y a au moins $\text{ex}(n, \mathcal{H}(G)) + 1$ arêtes bicolores, on peut les sélectionner, compléter pour obtenir une copie de G , puis assigner les arêtes bicolores pour l'équilibrer.

Application de la borne supérieure générale

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

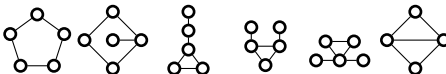
- ▶ $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$
- ▶ $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$
- ▶ $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- ▶ $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$
- ▶ $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- ▶ $\mathcal{H}(K_5) =$

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

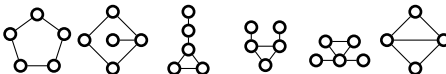
Pour tout entier $n \geq 5$, $\text{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \text{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$.

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$
- ▶ $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- ▶ $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tout entier $n \geq 5$, $\text{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \text{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$.

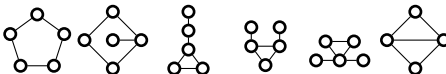
- ▶ $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$ [Füredi, Simonovits, 2013]

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$
- ▶ $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- ▶ $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tout entier $n \geq 5$, $\text{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \text{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$.

- ▶ $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$ [Füredi, Simonovits, 2013]

→ Qualité de cette borne ?

Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.

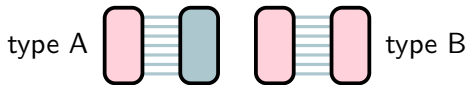
Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit $t \geq 3k + 1$. On trouve une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit $t \geq 3k + 1$. On trouve une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



3. Si copie de type A : copie équilibrée de C_{4k+2} .

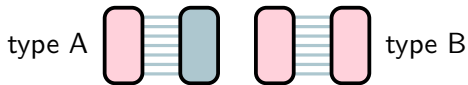
Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit $t \geq 3k + 1$. On trouve une copie de type A ou de type B de K_{2t} .



3. Si copie de type A : copie équilibrée de C_{4k+2} .
4. Si copie de type B : peu importe où se situe l'arête bicolore, on trouve une copie équilibrée de C_{4k+2} .

Borne inférieure pour K_5

Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.

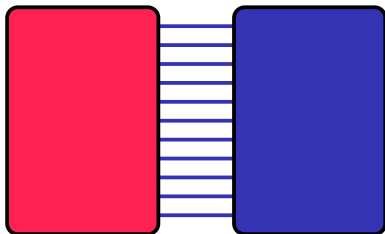
Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.



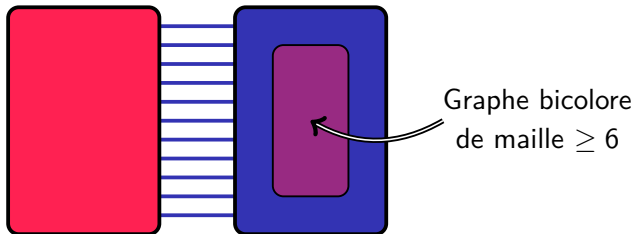
Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.



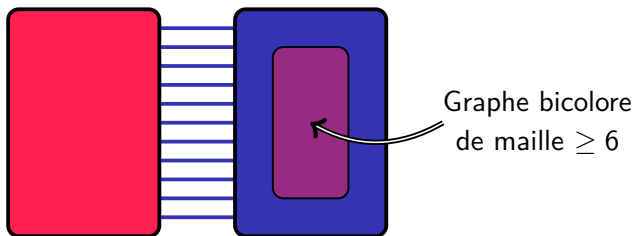
Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.



Ensuite, on montre que $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Qualité de la borne supérieure générale

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

K_5

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- ▶ Borne inférieure : $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon) \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

K_5

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- ▶ Borne inférieure : $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon) \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

K_5

- ▶ Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- ▶ Borne inférieure : $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon) \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

→ Des différences existent au sein des graphes non-équilibrables.

Le mot de la fin

Conclusion

- ▶ Résultats d'équilibrabilité et sur $\text{bal}(n, G)$
- ▶ Introduction de $\text{lbal}(n, G)$ pour étudier les graphes non-équilibrables

Le mot de la fin

Conclusion

- ▶ Résultats d'équilibrabilité et sur $\text{bal}(n, G)$
- ▶ Introduction de $\text{lbal}(n, G)$ pour étudier les graphes non-équilibrables

Questions ouvertes

- ▶ Complexité
- ▶ Plus de classes de graphes
- ▶ Plus de couleurs

Le mot de la fin

Conclusion

- ▶ Résultats d'équilibrabilité et sur $\text{bal}(n, G)$
- ▶ Introduction de $\text{lbal}(n, G)$ pour étudier les graphes non-équilibrables

Questions ouvertes

- ▶ Complexité
- ▶ Plus de classes de graphes
- ▶ Plus de couleurs

