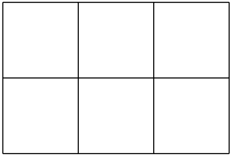
Jeux Octaux sur les Graphes : 0.03

Antoine Dailly
Avec Éric Duchêne, Aline Parreau

LIRIS, Université Lyon 1
Journées Graphes et Algorithmes 2015

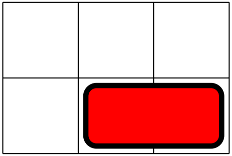
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



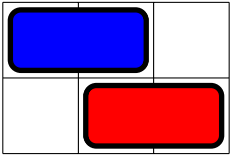
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



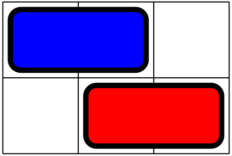
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



Jouons un peu...

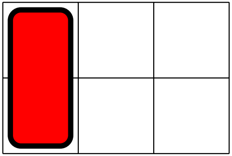
Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



$\Rightarrow$ Le deuxième joueur l'emporte.

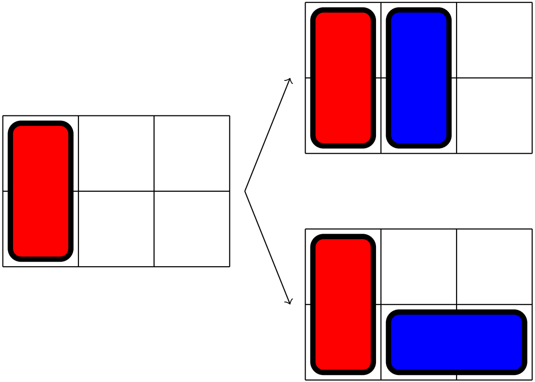
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



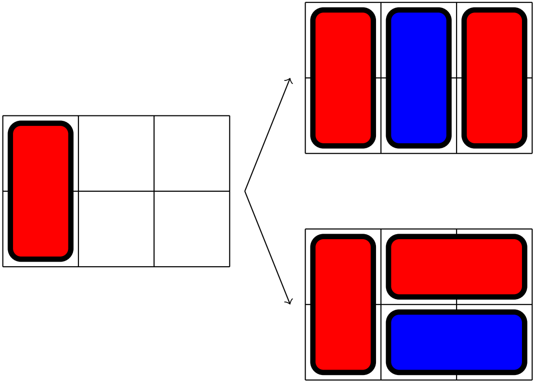
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



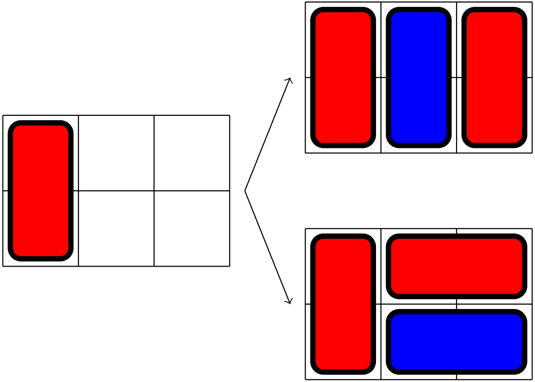
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.



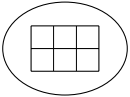
Jouons un peu...

Jeu de CRAM : Tour à tour, chaque joueur pose un domino sur la grille. Le dernier à poser un domino remporte la partie.

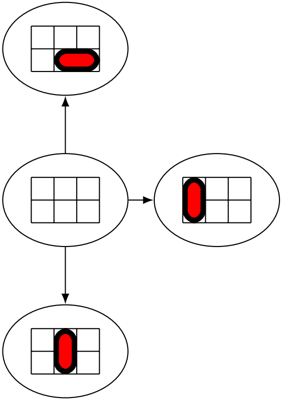


$\Rightarrow$ Le premier joueur l'emporte.

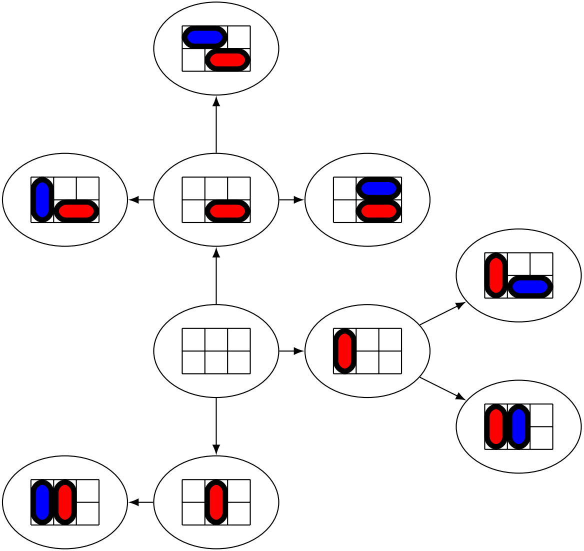
Le graphe de jeu



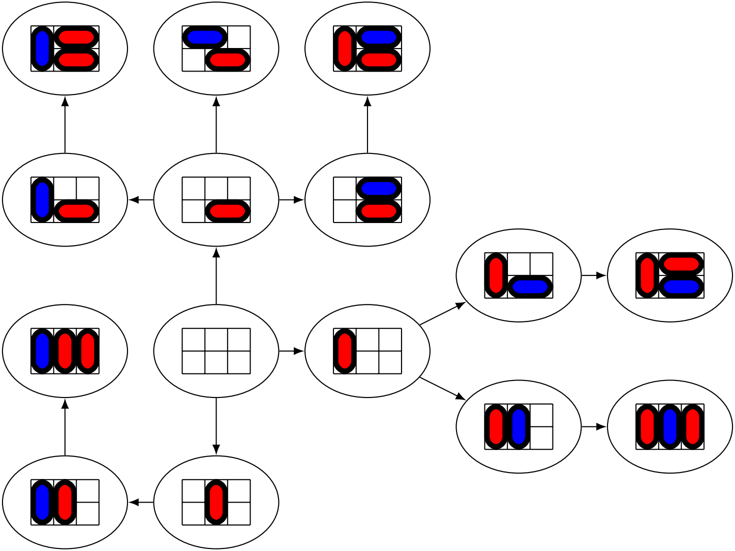
Le graphe de jeu



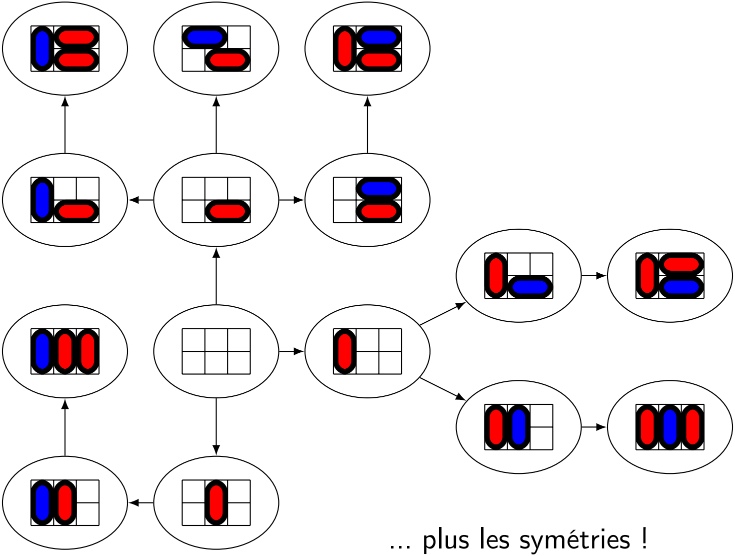
Le graphe de jeu



Le graphe de jeu



Le graphe de jeu



… plus les symétries !

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

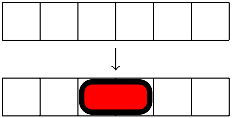
On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

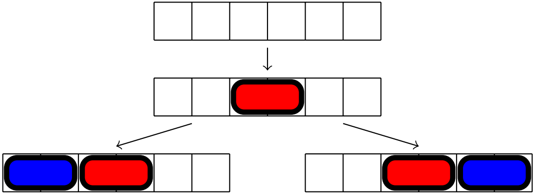
- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.



$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

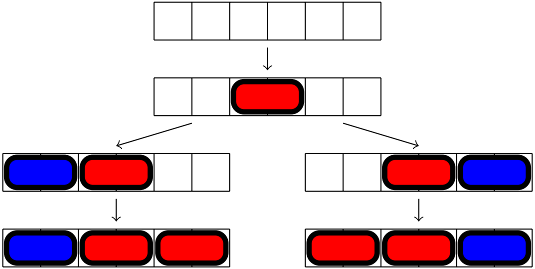
- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.



$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

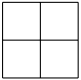
- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.



$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

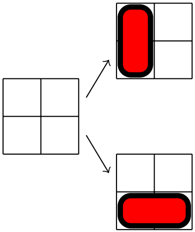
- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.
- Si le deuxième joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le premier joueur, alors le jeu est une $\mathcal{P}$-position.



$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

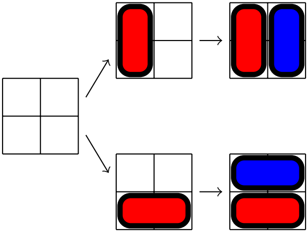
- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.
- Si le deuxième joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le premier joueur, alors le jeu est une $\mathcal{P}$-position.



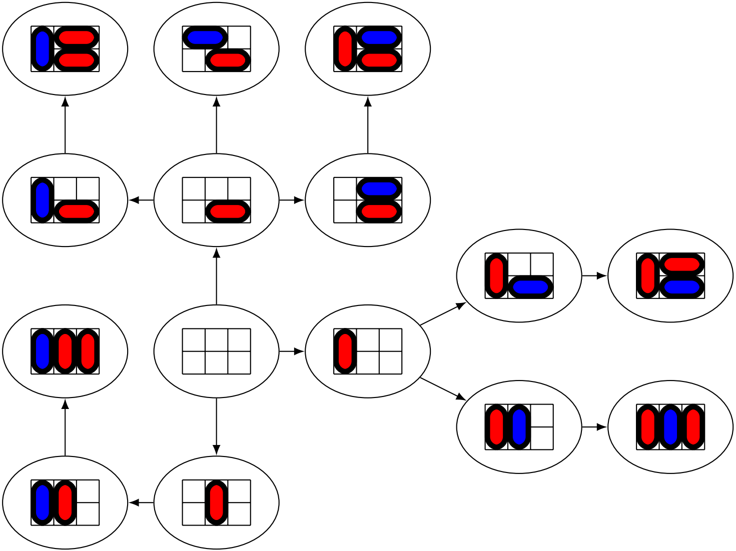
$\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$

On suppose que les deux joueurs jouent parfaitement.

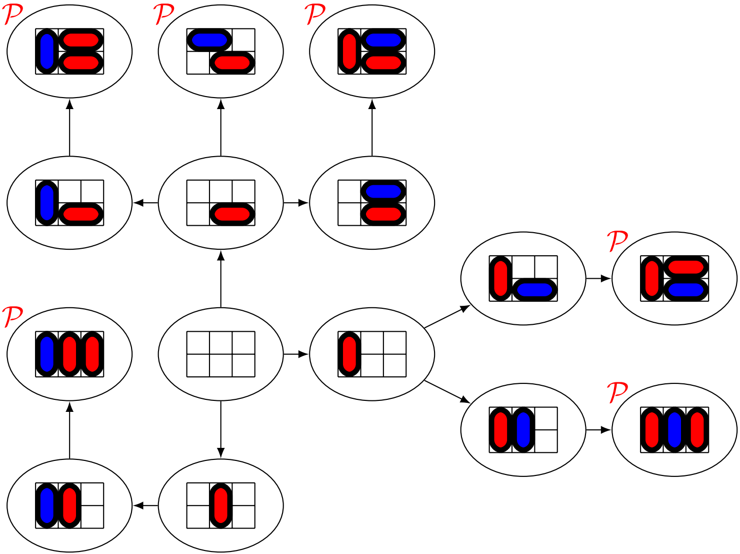
- Si le premier joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le deuxième joueur, alors le jeu est une $\mathcal{N}$-position.
- Si le deuxième joueur a une stratégie gagnante quoi que fasse le premier joueur, alors le jeu est une $\mathcal{P}$-position.



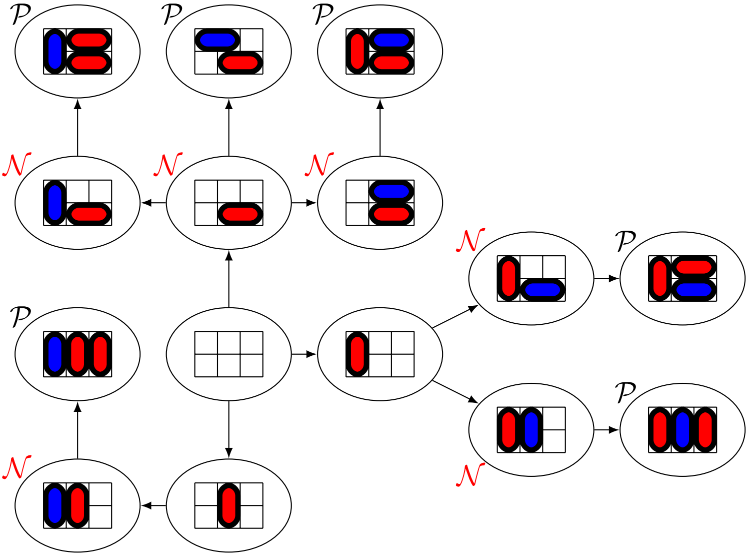
Utilisation du graphe de jeu



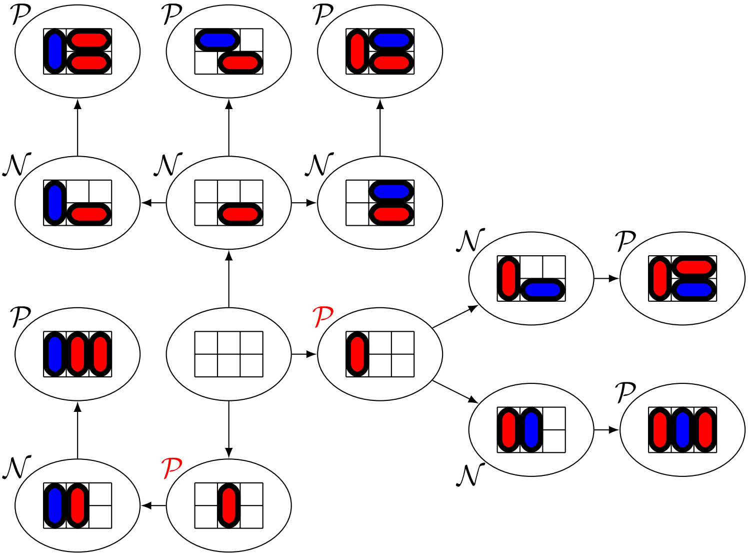
Utilisation du graphe de jeu



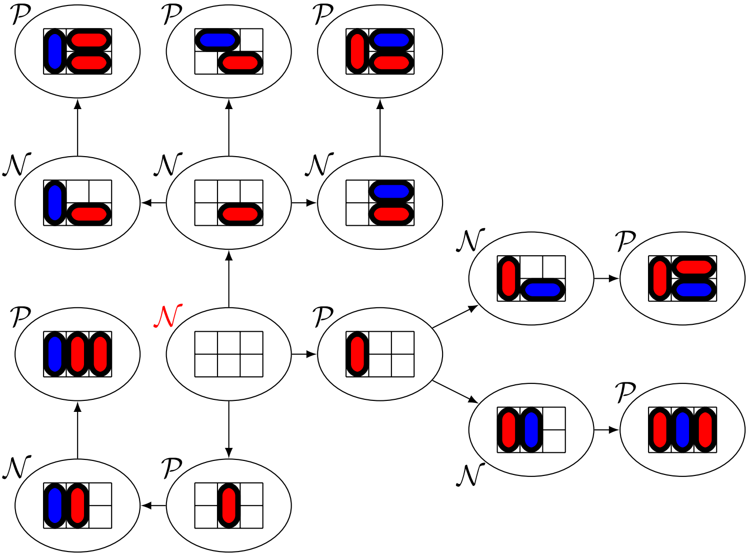
Utilisation du graphe de jeu



Utilisation du graphe de jeu



Utilisation du graphe de jeu



Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \dots u_n \dots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

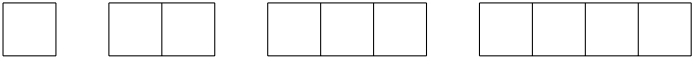
Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 ... u_n ...$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i



Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \dots u_n \dots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i

0.01

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \dots u_n \dots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i

0.01

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1u_2 \ldots u_n \ldots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$

0.02

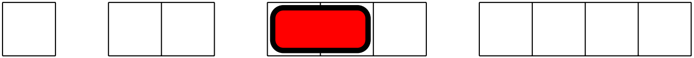
Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$



0.02

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1u_2...u_n...$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$

0.02

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$
- $b_3 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i au milieu d'une ligne de taille $\geq i + 2$

0.04

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1u_2...u_n...$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$
- $b_3 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i au milieu d'une ligne de taille $\geq i + 2$

0.04

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$
- $b_3 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i au milieu d'une ligne de taille $\geq i + 2$

0.06

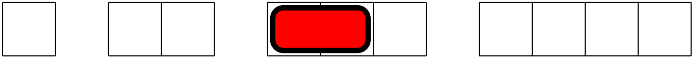
Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1u_2 \ldots u_n \ldots$ $(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$
- $b_3 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i au milieu d'une ligne de taille $\geq i + 2$



0.06

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$
- $b_3 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i au milieu d'une ligne de taille $\geq i + 2$

0.06

Jeux Octaux

Variantes de CRAM se jouant sur des lignes.

Définition

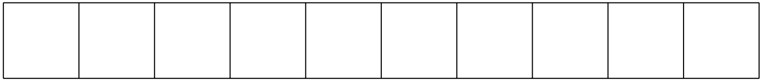
Jeu octal défini par son *code octal* $0.u_1 u_2 ... u_n ...$
$(u_i = b_1 + 2b_2 + 4b_3)$:

- $u_i = 0 \Rightarrow$ pas de polymino de taille i
- $b_1 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur ligne de taille i
- $b_2 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i sur le bord d'une ligne de taille $\geq i + 1$
- $b_3 = 1 \Rightarrow$ polymino de taille i au milieu d'une ligne de taille $\geq i + 2$

0.06

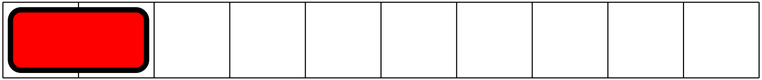
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



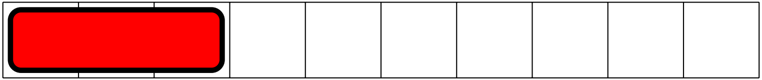
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



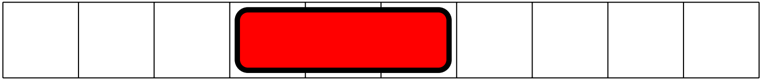
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



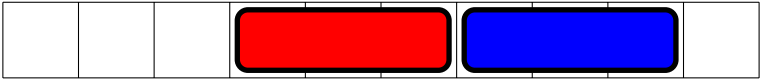
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



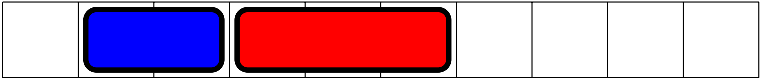
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



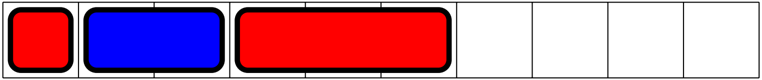
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



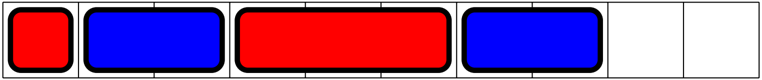
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



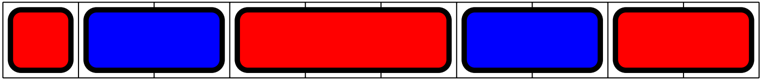
Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



Un exemple de jeu octal : 0.137

- Unomino si la ligne est de taille 1
- Domino sur le bord d'une ligne
- Triomino n'importe où



Étudier un jeu octal

Définition

La *Nim-séquence* d'un jeu octal est la chaine des résultats du jeu ($\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$) sur des lignes de taille 0, 1, 2...

Étudier un jeu octal

Définition

La *Nim-séquence* d'un jeu octal est la chaine des résultats du jeu ($\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$) sur des lignes de taille 0, 1, 2...

Nim-séquence de 0.03 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Étudier un jeu octal

Définition

La *Nim-séquence* d'un jeu octal est la chaine des résultats du jeu ($\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$) sur des lignes de taille 0, 1, 2...

Nim-séquence de 0.03 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.33 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Étudier un jeu octal

Définition

La *Nim-séquence* d'un jeu octal est la chaine des résultats du jeu ($\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$) sur des lignes de taille 0, 1, 2...

Nim-séquence de 0.03 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.33 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.07 (CRAM) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Étudier un jeu octal

Définition

La *Nim-séquence* d'un jeu octal est la chaine des résultats du jeu ($\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$) sur des lignes de taille 0, 1, 2...

Nim-séquence de 0.03 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.33 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.07 (CRAM) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

$\Rightarrow$ Pré-période 68, période 34 !

Étudier un jeu octal

Définition

La *Nim-séquence* d'un jeu octal est la chaine des résultats du jeu ($\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$) sur des lignes de taille 0, 1, 2...

Nim-séquence de 0.03 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.33 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

Nim-séquence de 0.07 (CRAM) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$

$\Rightarrow$ Pré-période 68, période 34 !

0.106 a une période de 328226140474 et une pré-période de 465384263797 !

Problématiques du domaine

Conjecture (Guy, dans *Winning Ways*, 2001)

Tout jeu octal (à code fini) a une Nim-séquence ultimement périodique.

Problématiques du domaine

Conjecture (Guy, dans *Winning Ways*, 2001)

Tout jeu octal (à code fini) a une Nim-séquence ultimement périodique.

- 0.006 -> jusqu'à des lignes de taille 2^{120} [Grossman, 2015]
- 0.007 -> jusqu'à des lignes de taille 2^{25} [Flammenkamp, 2012]
- ... mais toujours pas de périodicité !

Problématiques du domaine

Conjecture (Guy, dans *Winning Ways*, 2001)

Tout jeu octal (à code fini) a une Nim-séquence ultimement périodique.

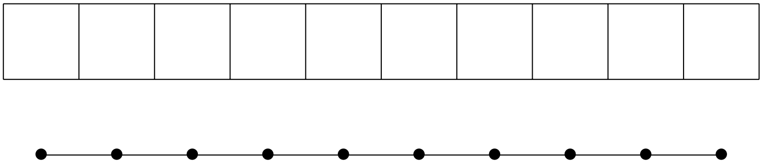
- 0.006 -> jusqu'à des lignes de taille 2^{120} [Grossman, 2015]
- 0.007 -> jusqu'à des lignes de taille 2^{25} [Flammenkamp, 2012]
- ... mais toujours pas de périodicité !

Autres problèmes

- Jeux octaux partisans
- Jeux hexadécimaux
- Jeux octaux sur des structures plus complexes

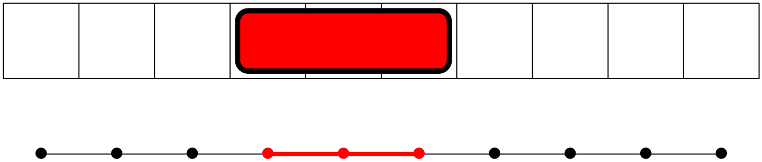
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



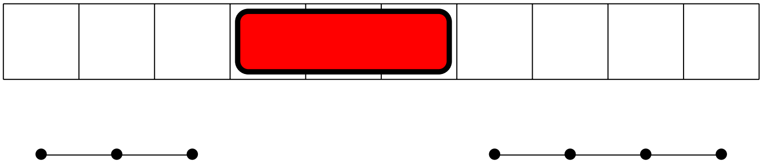
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



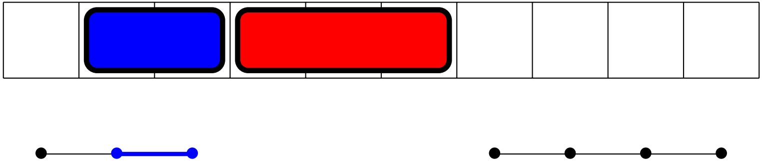
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



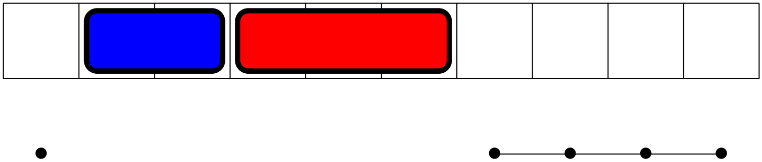
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



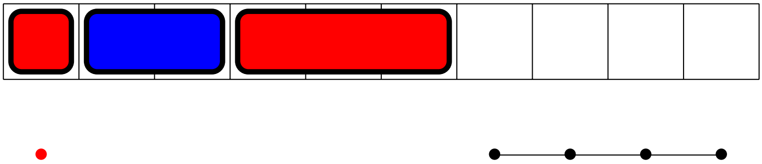
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



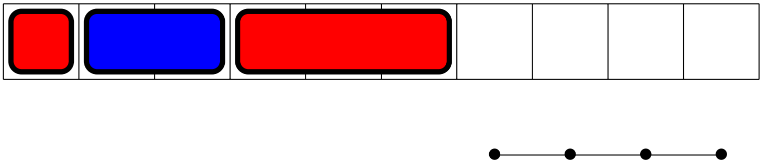
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



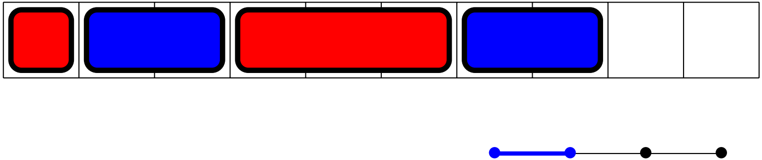
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



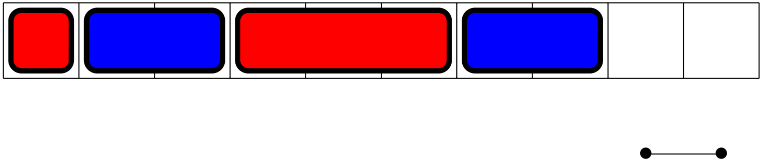
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



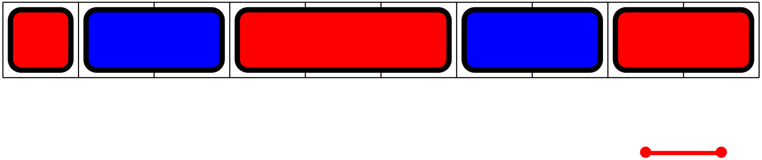
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



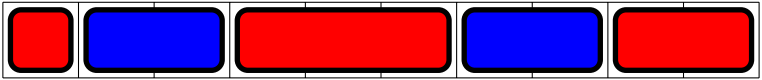
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



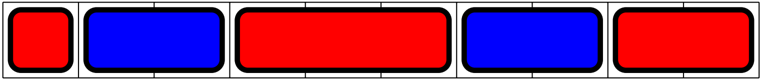
Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



Jeux octaux dans les graphes

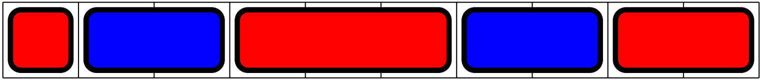
Idée : une ligne est équivalente à une chaine !



On va retirer des sommets (et leurs arêtes incidentes) d'un graphe.

Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !

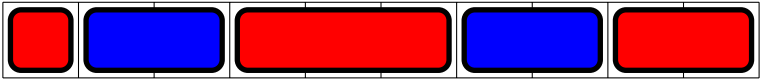


On va retirer des sommets (et leurs arêtes incidentes) d'un graphe.

- Jeu octal défini par son code octal, comme sur les lignes.

Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !

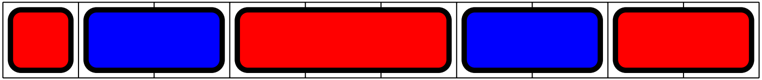


On va retirer des sommets (et leurs arêtes incidentes) d'un graphe.

- Jeu octal défini par son code octal, comme sur les lignes.
- Les sommets retirés doivent induire un sous-graphe connexe !

Jeux octaux dans les graphes

Idée : une ligne est équivalente à une chaine !

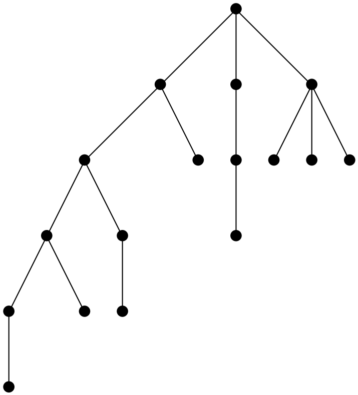


On va retirer des sommets (et leurs arêtes incidentes) d'un graphe.

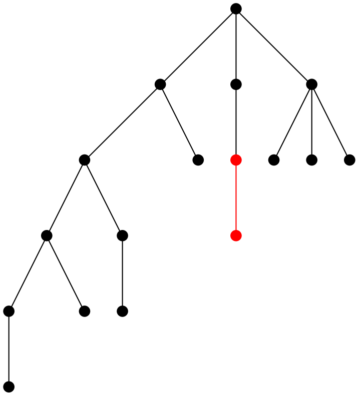
- Jeu octal défini par son code octal, comme sur les lignes.
- Les sommets retirés doivent induire un sous-graphe connexe !

Très peu de résultats (0.07, appelé ARC-KAYLES).

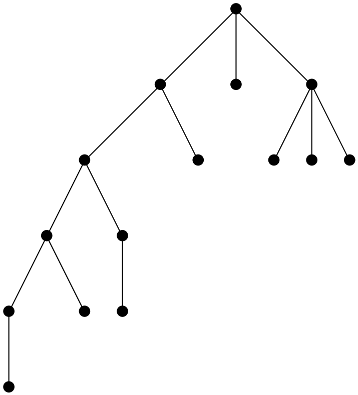
0.03 sur les arbres - Intuition



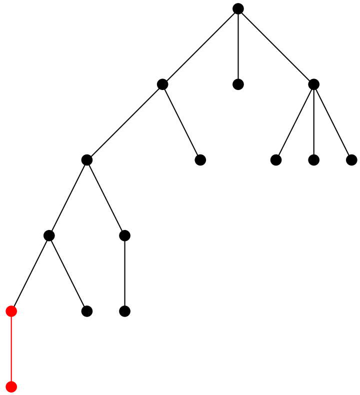
0.03 sur les arbres - Intuition



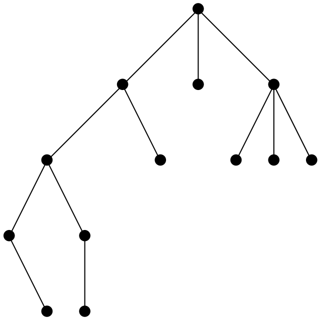
0.03 sur les arbres - Intuition



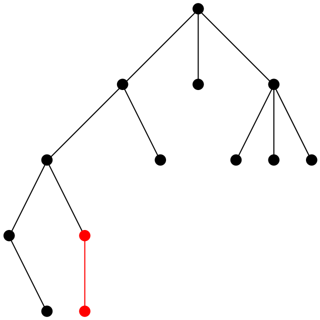
0.03 sur les arbres - Intuition



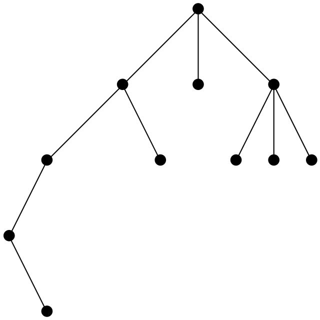
0.03 sur les arbres - Intuition



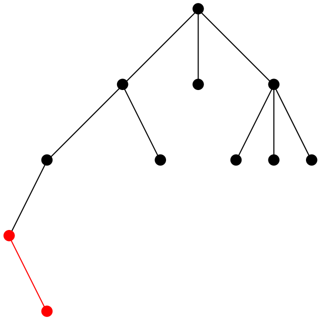
0.03 sur les arbres - Intuition



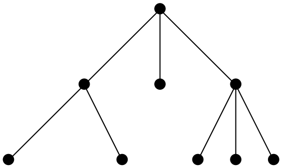
0.03 sur les arbres - Intuition



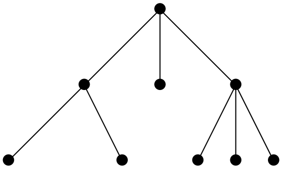
0.03 sur les arbres - Intuition



0.03 sur les arbres - Intuition

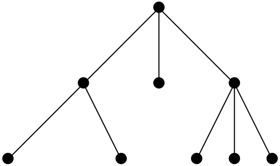


0.03 sur les arbres - Intuition



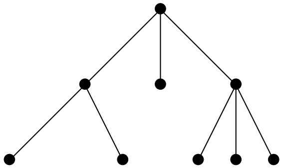
- Tout coup disponible et non joué reste disponible...

0.03 sur les arbres - Intuition



- Tout coup disponible et non joué reste disponible...
- ... sauf pour le P_3

0.03 sur les arbres - Intuition

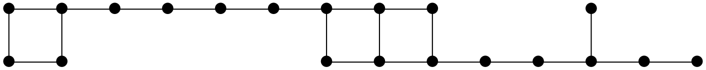


- Tout coup disponible et non joué reste disponible...
- ... sauf pour le P_3
- Pas de stratégie à adopter !

0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

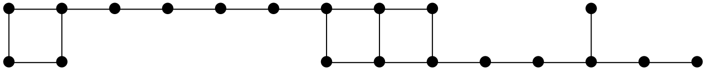
Une $(1, 2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2.



0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

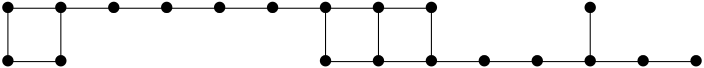
Une $(1, 2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

Une $(1, 2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



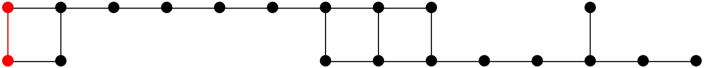
Proposition

D'une $(1, 2)$-grille paire non vide, on ne peut jouer que vers une $(1, 2)$-grille paire plus petite.

0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

Une $(1,2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



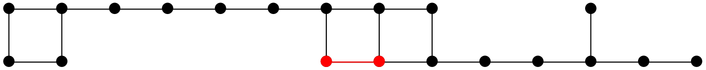
Proposition

D'une $(1,2)$-grille paire non vide, on ne peut jouer que vers une $(1,2)$-grille paire plus petite.

0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

Une $(1, 2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



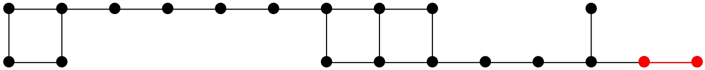
Proposition

D'une $(1, 2)$-grille paire non vide, on ne peut jouer que vers une $(1, 2)$-grille paire plus petite.

0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

Une $(1, 2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



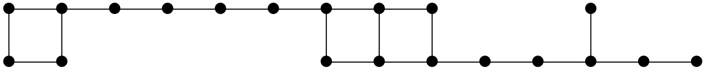
Proposition

D'une $(1, 2)$-grille paire non vide, on ne peut jouer que vers une $(1, 2)$-grille paire plus petite.

0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

Une $(1, 2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



Proposition

D'une $(1, 2)$-grille paire non vide, on ne peut jouer que vers une $(1, 2)$-grille paire plus petite.

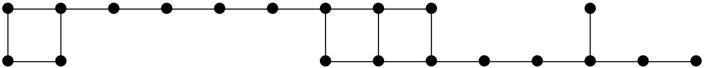
Théorème

Soit G une grille $2 \times n$. G est une $\mathcal{P}$-position ssi n est pair.

0.03 sur les grilles $2 \times n$

Définition

Une $(1,2)$-grille paire est un sous-graphe induit par une grille $2 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 2. De plus, chaque bloc de colonnes de taille 1 consécutives est de taille paire.



Proposition

D'une $(1,2)$-grille paire non vide, on ne peut jouer que vers une $(1,2)$-grille paire plus petite.

Théorème

Soit G une grille $2 \times n$. G est une $\mathcal{P}$-position ssi n est pair.

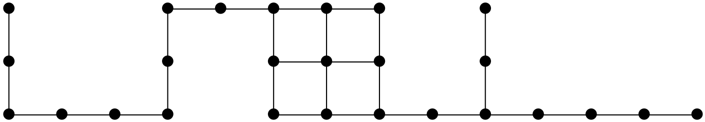
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

0.03 sur la grille $3 \times n$

Définition

Une $(1, 3)$-grille est un sous-graphe induit par une grille $3 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 3.

Exemple

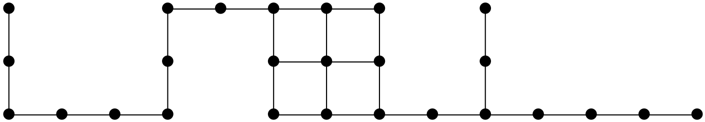


0.03 sur la grille $3 \times n$

Définition

Une $(1,3)$-grille est un sous-graphe induit par une grille $3 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 3. De plus, si une colonne est de taille 1, son sommet n'est pas sur la ligne du milieu.

Exemple

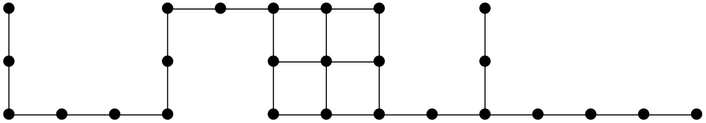


0.03 sur la grille $3 \times n$

Définition

Une $(1, 3)$-grille est un sous-graphe induit par une grille $3 \times n$, connexe, dont les colonnes sont de taille 1 ou 3. De plus, si une colonne est de taille 1, son sommet n'est pas sur la ligne du milieu.

Exemple



Observation

Une chaine est une $(1, 3)$-grille.

0.03 sur la grille $3 \times n$

Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

0.03 sur la grille $3 \times n$

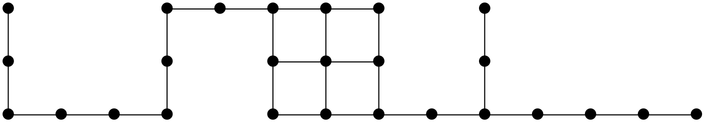
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.



0.03 sur la grille $3 \times n$

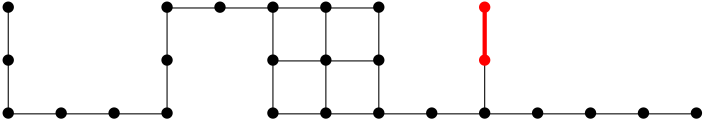
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.



0.03 sur la grille $3 \times n$

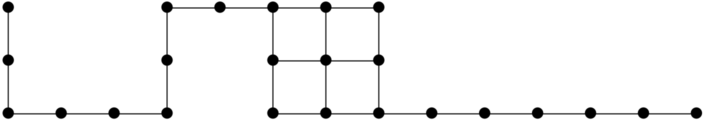
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.



0.03 sur la grille $3 \times n$

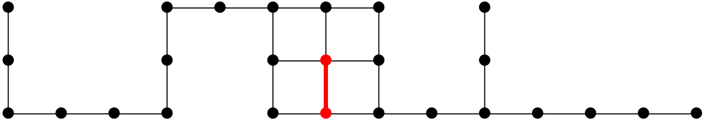
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.



0.03 sur la grille $3 \times n$

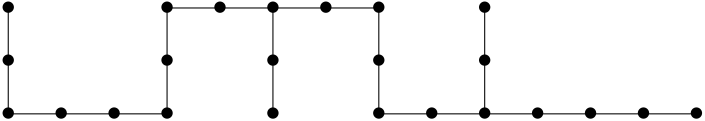
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.



0.03 sur la grille $3 \times n$

Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1, 3)$-grille non-vide à une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.
- Aucun coup vertical n'est possible.

0.03 sur la grille $3 \times n$

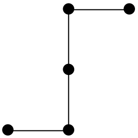
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1,3)$-grille non-vide à une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.
- Aucun coup vertical n'est possible. Donc, toute colonne de taille 3 est encadrée par deux colonnes de taille 1 de cette façon :



0.03 sur la grille $3 \times n$

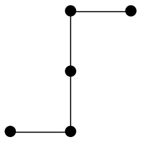
Lemme

On peut toujours jouer d'une $(1, 3)$-grille non-vide à une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Un coup vertical est possible.
- Aucun coup vertical n'est possible. Donc, toute colonne de taille 3 est encadrée par deux colonnes de taille 1 de cette façon :

  Donc la grille est une chaine.

0.03 sur la grille $3 \times n$

Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

0.03 sur la grille $3 \times n$

Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.

0.03 sur la grille $3 \times n$

Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :

0.03 sur la grille $3 \times n$

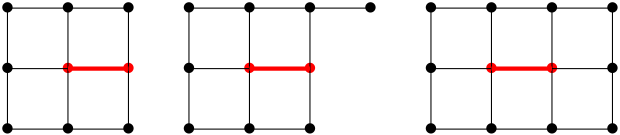
Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets au milieu dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

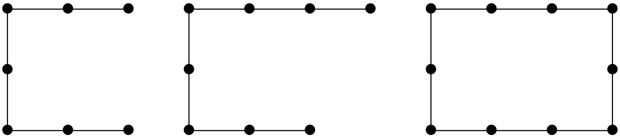
Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1,3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets au milieu dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

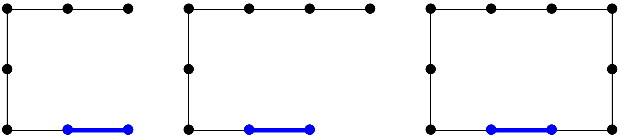
Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets au milieu dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

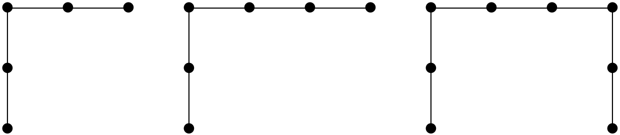
Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1,3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets au milieu dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

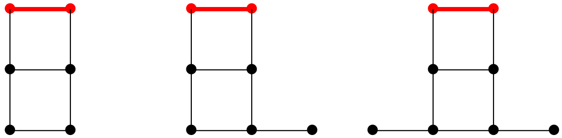
Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

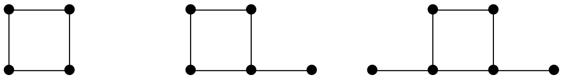
Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

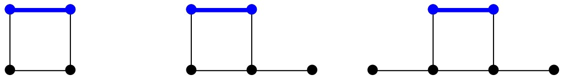
Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1,3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

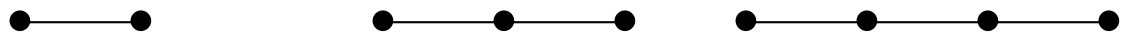
Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1,3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

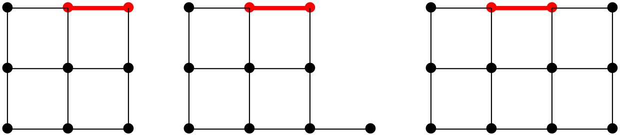
Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

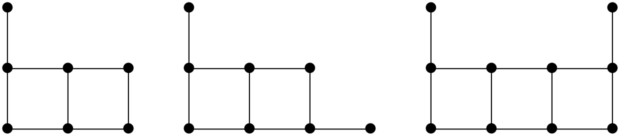
Lemme

Soit une $(1, 3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1, 3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1, 3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

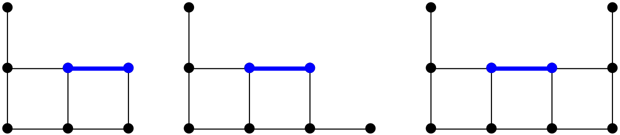
Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1,3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

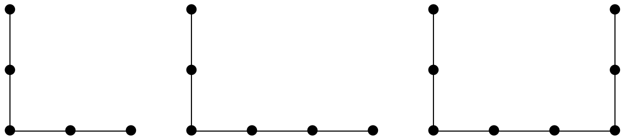
Lemme

Soit une $(1,3)$-grille de taille ≥ 4. Pour tout coup, il existe une réponse qui résulte en une $(1,3)$-grille.

Preuve

Deux possibilités :

- Le premier joueur a joué vers une $(1,3)$-grille.
- Dans l'autre cas, il a joué horizontalement. Il y a trois cas :
  - Prendre deux sommets en haut dans une de ces configurations :



0.03 sur la grille $3 \times n$

Théorème

Il existe une stratégie gagnante qui vide une $(1,3)$-grille pour le jeu 0.03.

0.03 sur la grille $3 \times n$

Théorème

Il existe une stratégie gagnante qui vide une $(1, 3)$-grille pour le jeu 0.03.

Corollaire

Une $(1, 3)$-grille G est une $\mathcal{P}$-position pour le jeu 0.03 si et seulement si $\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$ est pair.

0.03 sur la grille $3 \times n$

Théorème

Il existe une stratégie gagnante qui vide une $(1,3)$-grille pour le jeu 0.03.

Corollaire

Une $(1,3)$-grille G est une $\mathcal{P}$-position pour le jeu 0.03 si et seulement si $\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$ est pair.

Corollaire

Soit G une grille $3 \times n$. G est une $\mathcal{N}$-position pour le jeu 0.03 si et seulement si $n \equiv 1 \bmod 4$ ou $n \equiv 2 \bmod 4$.

0.03 sur la grille $3 \times n$

Théorème

Il existe une stratégie gagnante qui vide une $(1, 3)$-grille pour le jeu 0.03.

Corollaire

Une $(1, 3)$-grille G est une $\mathcal{P}$-position pour le jeu 0.03 si et seulement si $\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$ est pair.

Corollaire

Soit G une grille $3 \times n$. G est une $\mathcal{N}$-position pour le jeu 0.03 si et seulement si $n \equiv 1 \bmod 4$ ou $n \equiv 2 \bmod 4$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Résultat	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$

Vers la grille $m \times n$?

Conjecture

Il existe une stratégie gagnante garantissant de vider une grille quelconque dans le jeu 0.03.

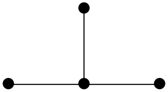
Vers la grille $m \times n$?

Conjecture

Il existe une stratégie gagnante garantissant de vider une grille quelconque dans le jeu 0.03.

Piste

Chercher à éviter les structures contenant le sous-graphe suivant :



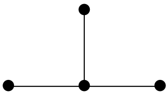
Vers la grille $m \times n$?

Conjecture

Il existe une stratégie gagnante garantissant de vider une grille quelconque dans le jeu 0.03.

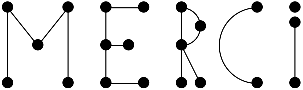
Piste

Chercher à éviter les structures contenant le sous-graphe suivant :



Travail en cours...

Conclusion



Des questions ?