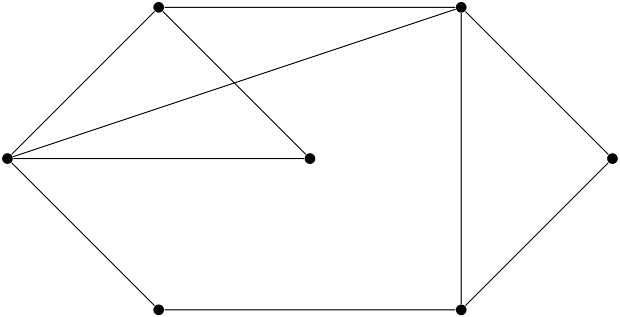
Coloration d'arêtes union-distinguante

Nicolas Bousquet, Antoine Dailly, Éric Duchêne,
Hamamache Kheddouci, Aline Parreau

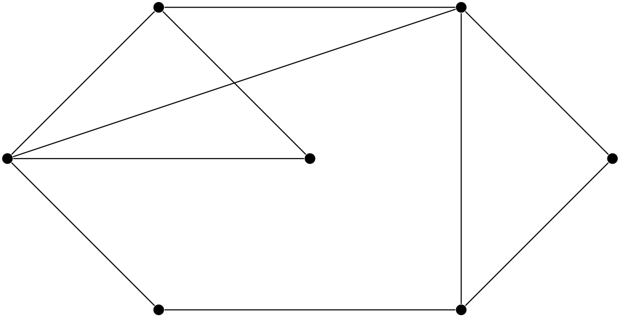
LIRIS, Université Lyon 1

JGA 2016

Contexte

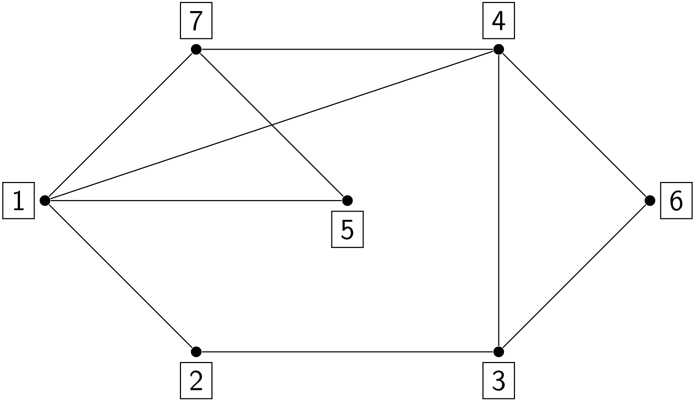


Contexte



But : identifier chaque sommet du graphe par un *code*.

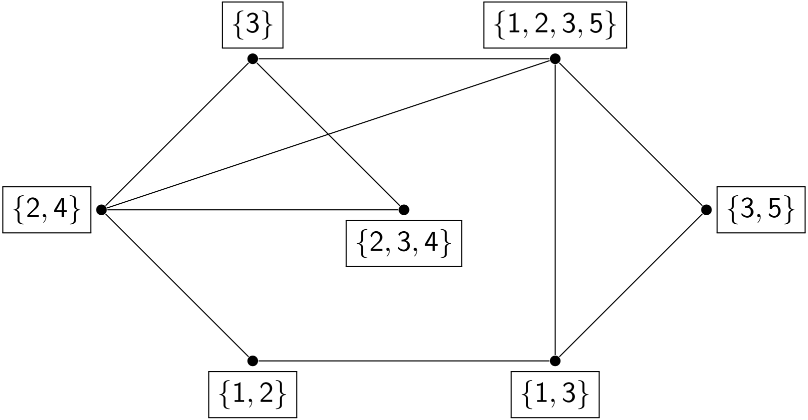
Contexte



But : identifier chaque sommet du graphe par un *code*.

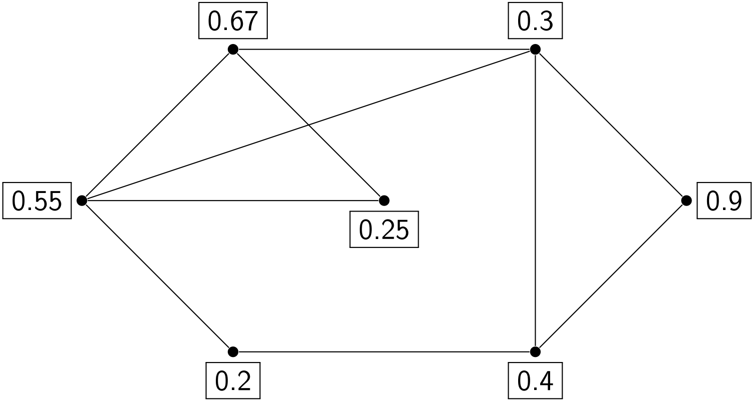
Les codes peuvent être des entiers

Contexte



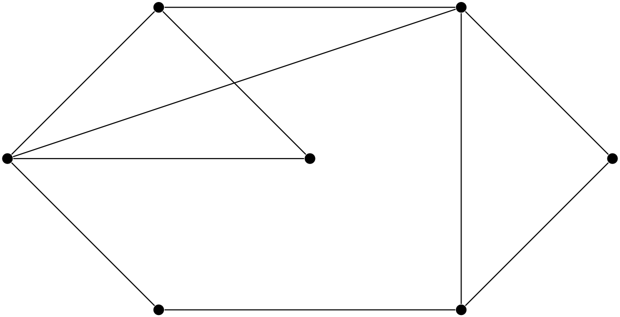
But : identifier chaque sommet du graphe par un *code*.
Les codes peuvent être des entiers, des ensembles d'entiers

Contexte



But : identifier chaque sommet du graphe par un *code*.
Les codes peuvent être des entiers, des ensembles d'entiers, des flottants, . . .

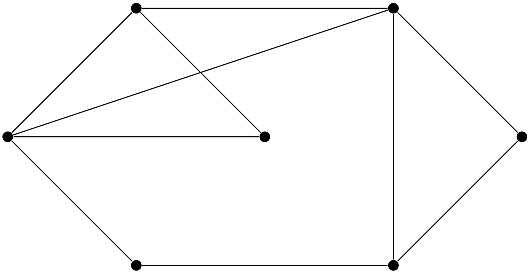
Contexte



But : identifier chaque sommet du graphe par un *code*.
Les codes peuvent être des entiers, des ensembles d'entiers, des flottants, ...
$\Rightarrow$ On utilise une coloration pour générer les codes.

Contexte

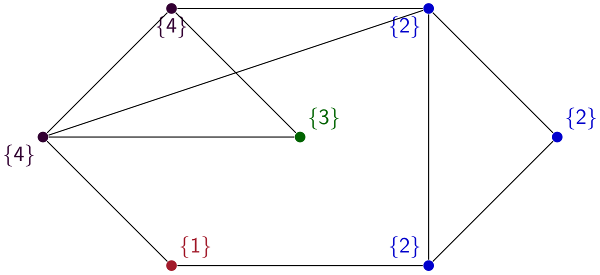
Coloration identifiante (Parreau, 2012)



Contexte

Coloration identifiante (Parreau, 2012)

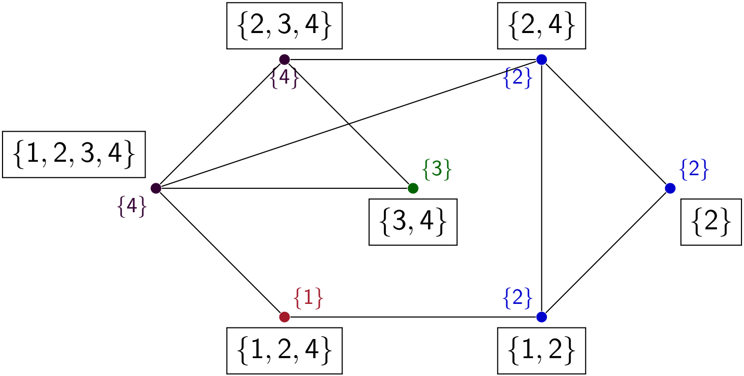
- Sommets colorés par un entier



Contexte

Coloration identifiante (Parreau, 2012)

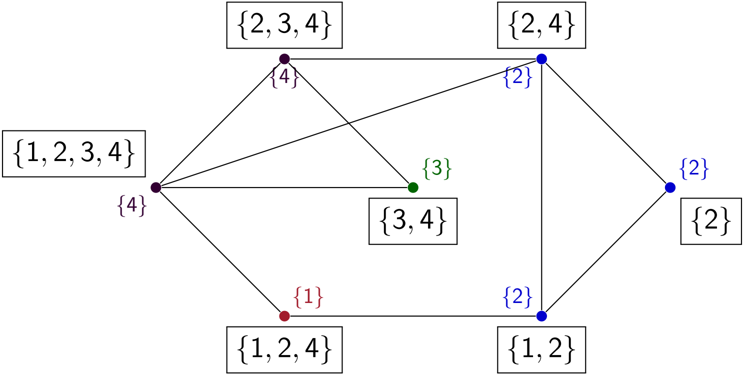
- Sommets colorés par un entier
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de son voisinage fermé



Contexte

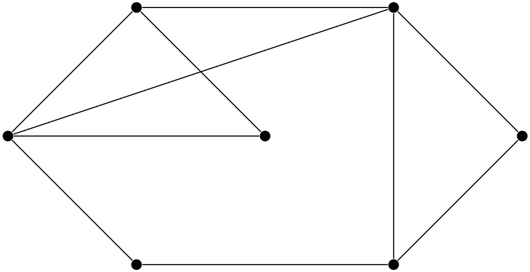
Coloration identifiante (Parreau, 2012)

- Sommets colorés par un entier
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de son voisinage fermé
- Minimiser le nombre de couleurs (paramètre χ_{id})



Contexte

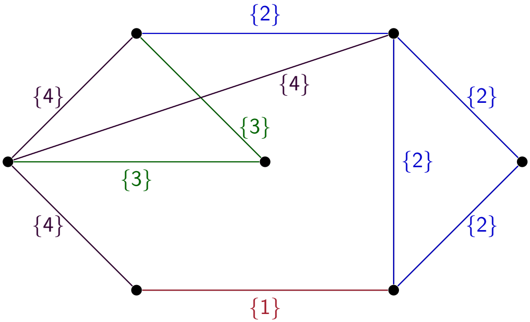
Coloration d'arêtes distinguante (Harary et Plantholt, 1985)



Contexte

Coloration d'arêtes distinguante (Harary et Plantholt, 1985)

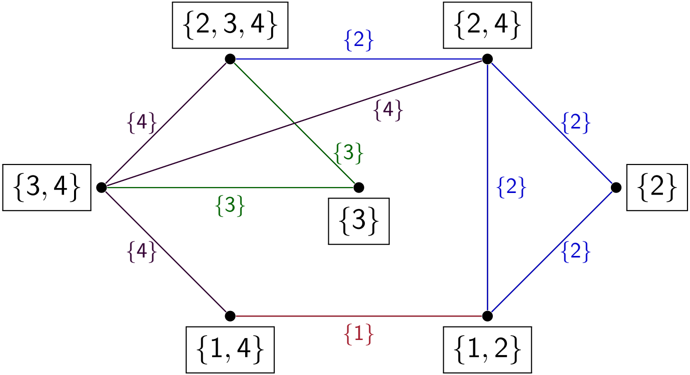
- Arêtes colorées par un entier



Contexte

Coloration d'arêtes distinguante (Harary et Plantholt, 1985)

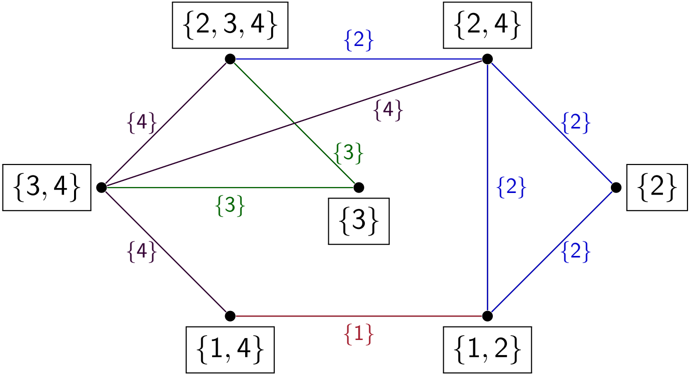
- Arêtes colorées par un entier
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de ses arêtes incidentes



Contexte

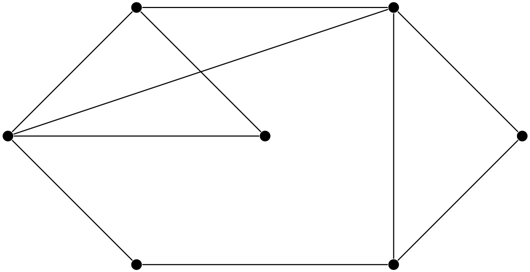
Coloration d'arêtes distinguante (Harary et Plantholt, 1985)

- Arêtes colorées par un entier
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de ses arêtes incidentes
- Minimiser le nombre de couleurs (paramètre χ_S)



Contexte

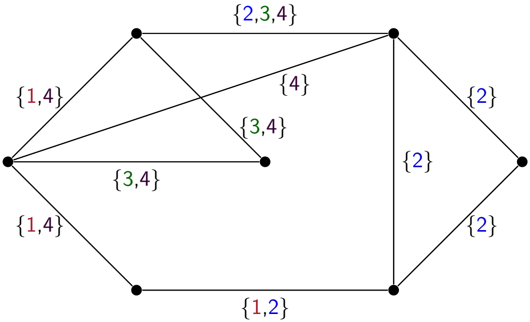
Coloration d'arêtes union-distinguante



Contexte

Coloration d'arêtes union-distinguante

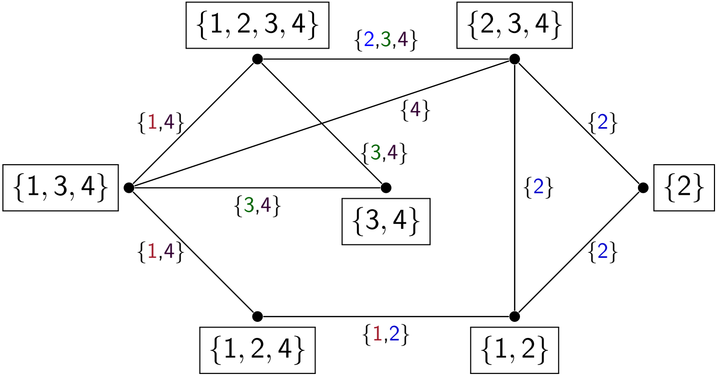
- Arêtes colorées par un ensemble d'entiers



Contexte

Coloration d'arêtes union-distinguante

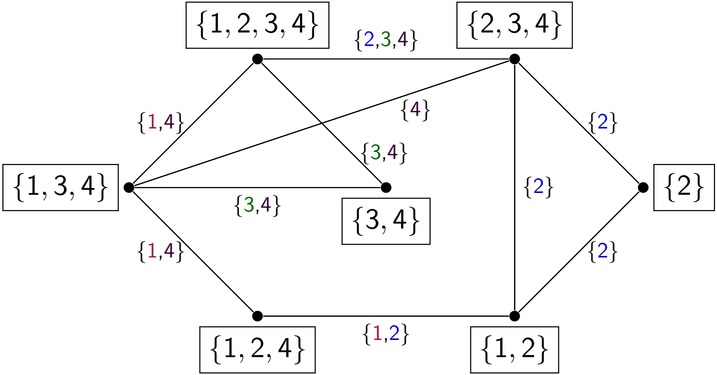
- Arêtes colorées par un ensemble d'entiers
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de ses arêtes incidentes



Contexte

Coloration d'arêtes union-distinguante

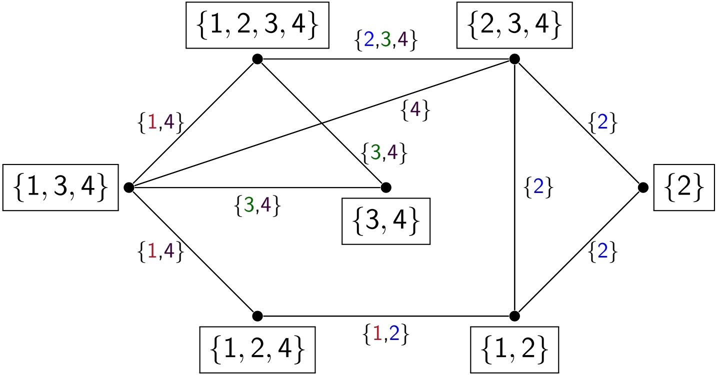
- Arêtes colorées par un ensemble d'entiers
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de ses arêtes incidentes
- Minimiser le nombre de couleurs (paramètre $\chi_{\cup}$)



Contexte

Coloration d'arêtes union-distinguante

- Arêtes colorées par un ensemble d'entiers
- Code d'un sommet = l'union des couleurs de ses arêtes incidentes
- Minimiser le nombre de couleurs (paramètre $\chi_\cup$)

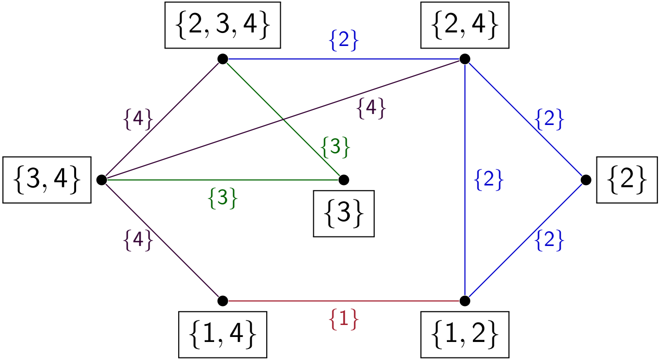


⇒ Graphes avec des composantes connexes de taille au moins 3 !

Propriétés

Propriétés

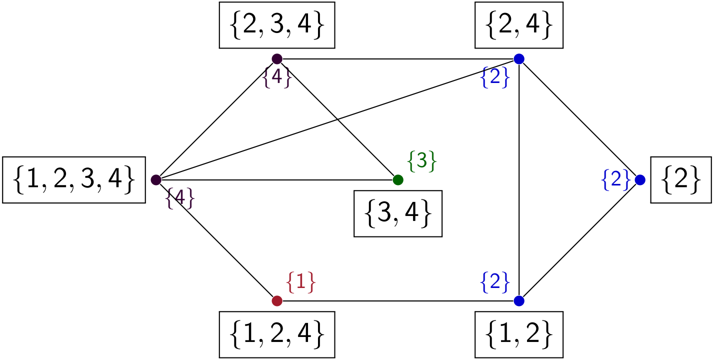
Une coloration d'arêtes distinguante est une coloration d'arêtes union-distinguante !



Propriétés

Une coloration d'arêtes distinguante est une coloration d'arêtes union-distinguante !

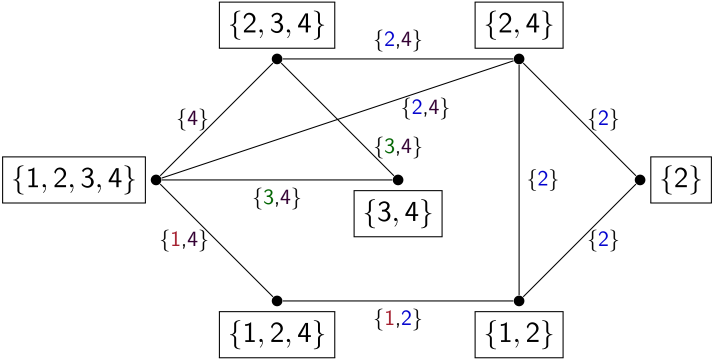
Une coloration identifiante induit une coloration d'arêtes union-distinguante.



Propriétés

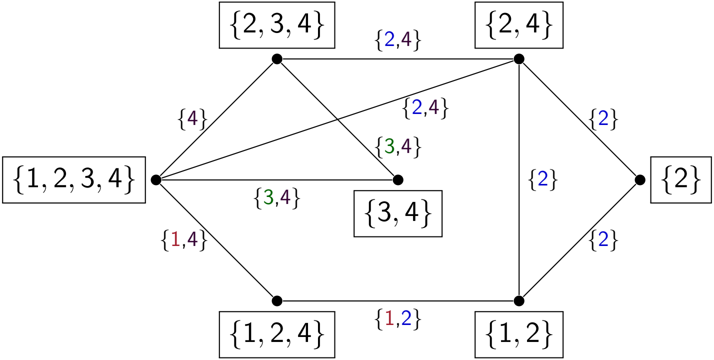
Une coloration d'arêtes distinguante est une coloration d'arêtes union-distinguante !

Une coloration identifiante induit une coloration d'arêtes union-distinguante.



Propriétés

Une coloration d'arêtes distinguante est une coloration d'arêtes union-distinguante !
Une coloration identifiante induit une coloration d'arêtes union-distinguante.

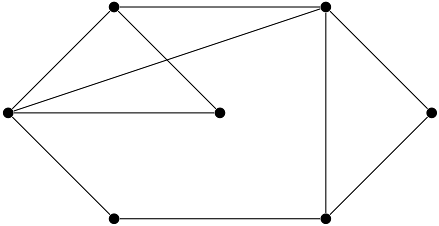


Proposition

Pour tout graphe G, $\chi_{\cup}(G) \leq min(\chi_S(G), \chi_{id}(G))$.

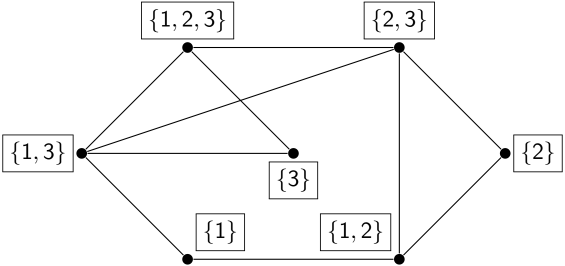
Propriétés

On veut construire une coloration d'arêtes union-distinguante d'un graphe $G(V, E)$ utilisant k couleurs.



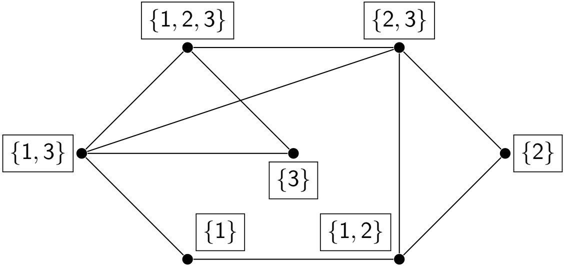
Propriétés

On veut construire une coloration d'arêtes union-distinguante d'un graphe $G(V, E)$ utilisant k couleurs.
$\{1, \ldots, k\}$ a $2^k - 1$ sous-ensembles non-vides, donc $|V| \leq 2^k - 1$.



Propriétés

On veut construire une coloration d'arêtes union-distinguante d'un graphe $G(V, E)$ utilisant k couleurs.
$\{1, \ldots, k\}$ a $2^k - 1$ sous-ensembles non-vides, donc $|V| \leq 2^k - 1$.

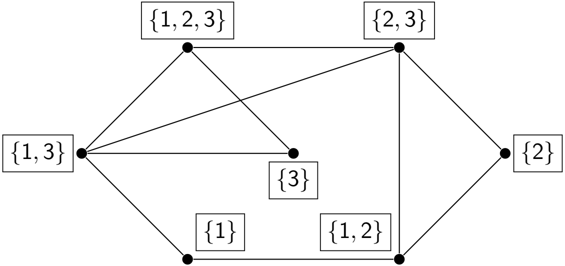


Proposition

Pour tout graphe G, $\chi_\cup(G) \geq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$.

Propriétés

On veut construire une coloration d'arêtes union-distinguante d'un graphe $G(V, E)$ utilisant k couleurs.
$\{1, \dots, k\}$ a $2^k - 1$ sous-ensembles non-vides, donc $|V| \leq 2^k - 1$.



Proposition

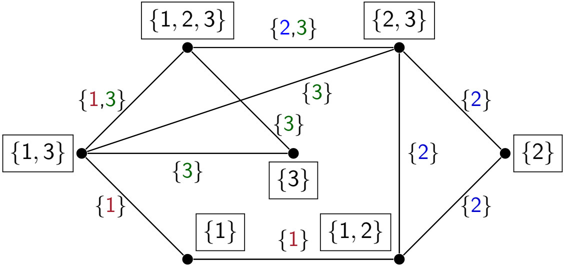
Pour tout graphe G, $\chi_\cup(G) \geq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$.

Définition

Un graphe G est *optimalement coloré* si
$\chi_\cup(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$.

Propriétés

On veut construire une coloration d'arêtes union-distinguante d'un graphe $G(V, E)$ utilisant k couleurs.
$\{1, \ldots, k\}$ a $2^k - 1$ sous-ensembles non-vides, donc $|V| \leq 2^k - 1$.



Proposition

Pour tout graphe G, $\chi_\cup(G) \geq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$.

Définition

Un graphe G est *optimalement coloré* si
$\chi_\cup(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$.

Propriétés

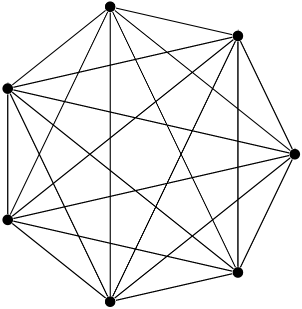
Proposition

Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.

Propriétés

Proposition

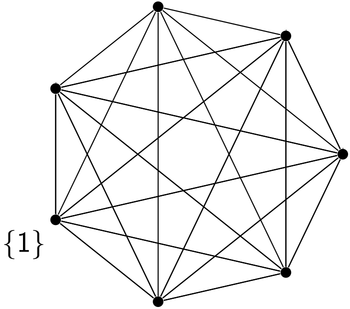
Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.



Propriétés

Proposition

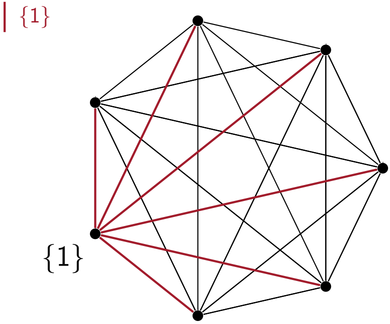
Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.



Propriétés

Proposition

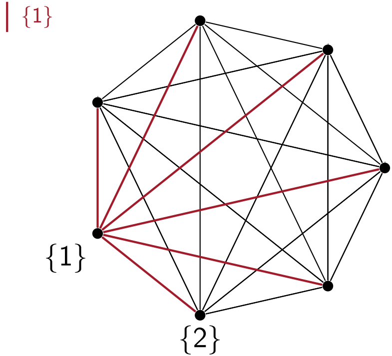
Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.



Propriétés

Proposition

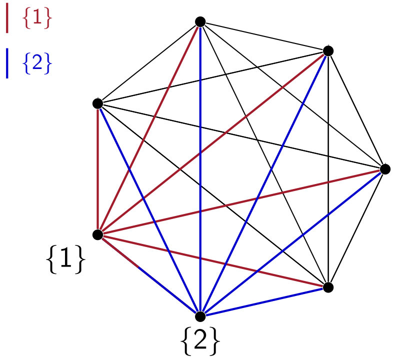
Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.



Propriétés

Proposition

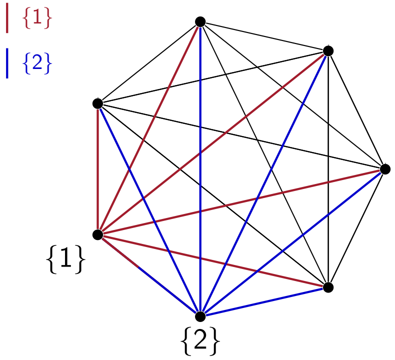
Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.



Propriétés

Proposition

Le graphe complet K_n d'ordre $n = 2^k - 1$ ne peut pas être optimalement coloré.



$\Rightarrow$ Un seul sommet peut être identifié par un singleton dans K_{2^k-1}
$\Rightarrow$ K_{2^k-1} nécessite plus que k couleurs

Résultats sur diverses classes

Théorème

Un chemin P_n peut être optimalement coloré.

Preuve

Résultats sur diverses classes

Théorème

Un chemin P_n peut être optimalement coloré.

Preuve

Hypothèse d'induction sur $n = 2^k + \ell$ ($\ell \leq 2^k - 1$) : P_{2^k-1} et P_ℓ peuvent être optimalement colorés.

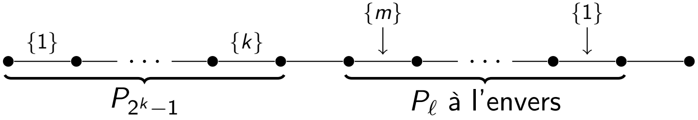
Résultats sur diverses classes

Théorème

Un chemin P_n peut être optimalement coloré.

Preuve

Hypothèse d'induction sur $n = 2^k + \ell$ ($\ell \leq 2^k - 1$) : P_{2^k-1} et P_ℓ peuvent être optimalement colorés.



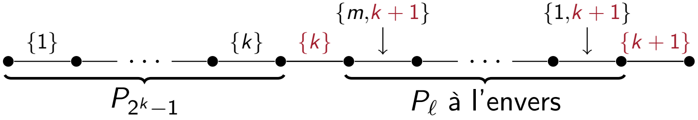
Résultats sur diverses classes

Théorème

Un chemin P_n peut être optimalement coloré.

Preuve

Hypothèse d'induction sur $n = 2^k + \ell$ ($\ell \leq 2^k - 1$) : P_{2^k-1} et P_ℓ peuvent être optimalement colorés.



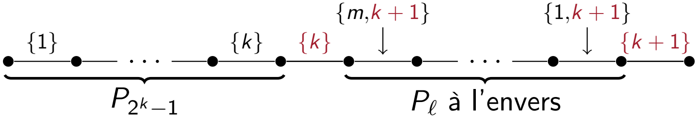
Résultats sur diverses classes

Théorème

Un chemin P_n peut être optimalement coloré.

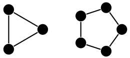
Preuve

Hypothèse d'induction sur $n = 2^k + \ell$ ($\ell \leq 2^k - 1$) : P_{2^k-1} et P_ℓ peuvent être optimalement colorés.



Théorème

Pour $n \geq 4$, $n \neq 7$, C_n peut être optimalement coloré.
$\chi_\cup(C_3) = 3$ et $\chi_\cup(C_7) = 4$.



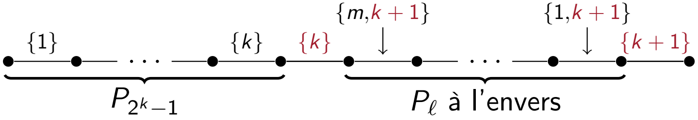
Résultats sur diverses classes

Théorème

Un chemin P_n peut être optimalement coloré.

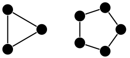
Preuve

Hypothèse d'induction sur $n = 2^k + \ell$ ($\ell \leq 2^k - 1$) : P_{2^k-1} et P_ℓ peuvent être optimalement colorés.



Théorème

Pour $n \geq 4$, $n \neq 7$, C_n peut être optimalement coloré.
$\chi_\cup(C_3) = 3$ et $\chi_\cup(C_7) = 4$.



Théorème

Un arbre binaire complet de hauteur au moins 1 peut être optimalement coloré.

Borne supérieure

Borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe $G(V, E)$, on a $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 2$.

Remarque

$\chi_{\cup}$ ne peut prendre que trois valeurs !

Borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe $G(V,E)$, on a $\chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 2$.

Remarque

$\chi_\cup$ ne peut prendre que trois valeurs !

$\chi_\cup(G)$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 1$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 2$

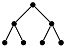
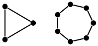
Borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe $G(V,E)$, on a $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 2$.

Remarque

$\chi_{\cup}$ ne peut prendre que trois valeurs !

$\chi_{\cup}(G)$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 1$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 2$
	Chemins  Cycles  Arbres binaires complets 	K_{2^k-1}  C_3, C_7 	

Lemme

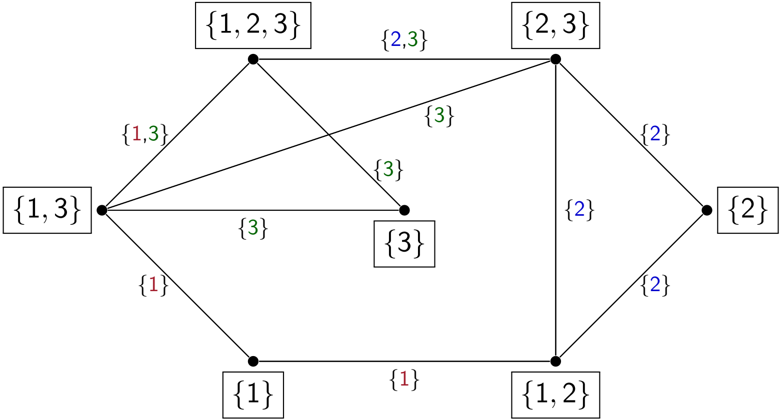
Lemme

Si H est un super-graphe d'arêtes de G, alors $\chi_\cup(H) \leq \chi_\cup(G) + 1$.

Lemme

Lemme

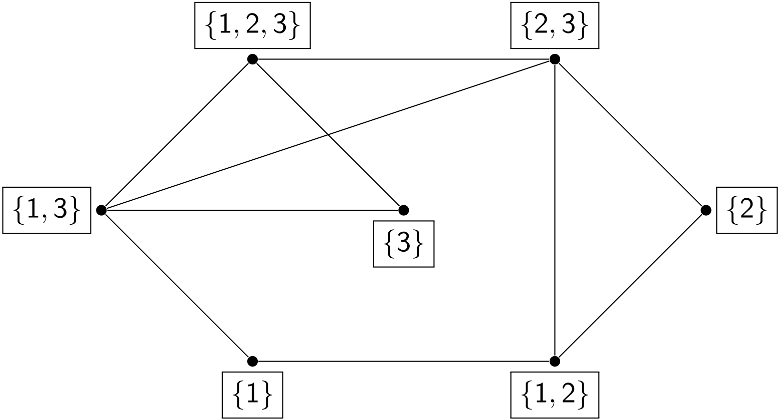
Si H est un super-graphe d'arêtes de G, alors $\chi_{\cup}(H) \leq \chi_{\cup}(G) + 1$.



Lemme

Lemme

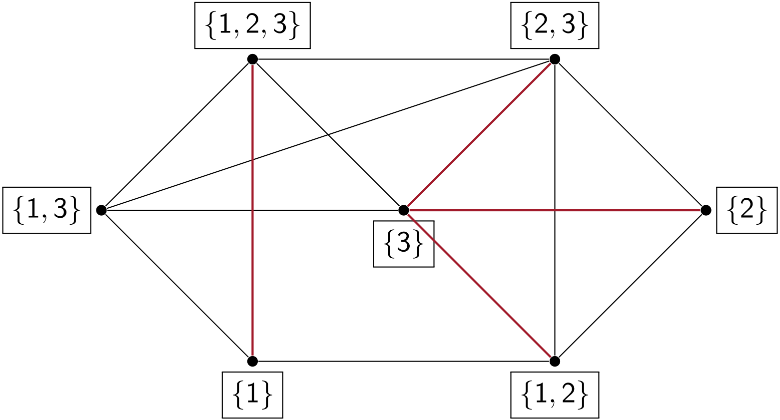
Si H est un super-graphe d'arêtes de G, alors $\chi_{\cup}(H) \leq \chi_{\cup}(G) + 1$.



Lemme

Lemme

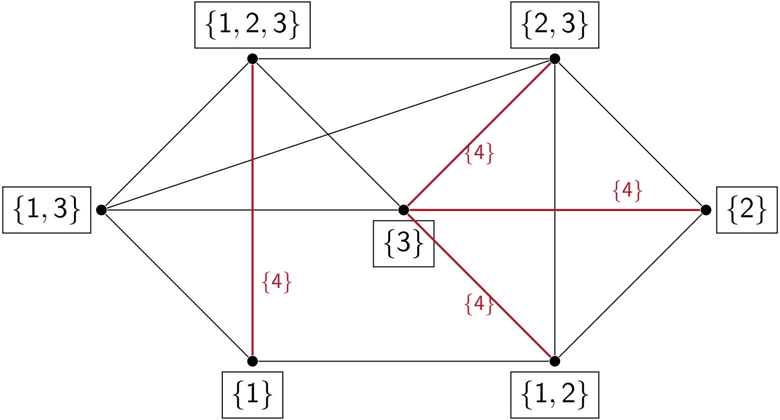
Si H est un super-graphe d'arêtes de G, alors $\chi_{\cup}(H) \leq \chi_{\cup}(G) + 1$.



Lemme

Lemme

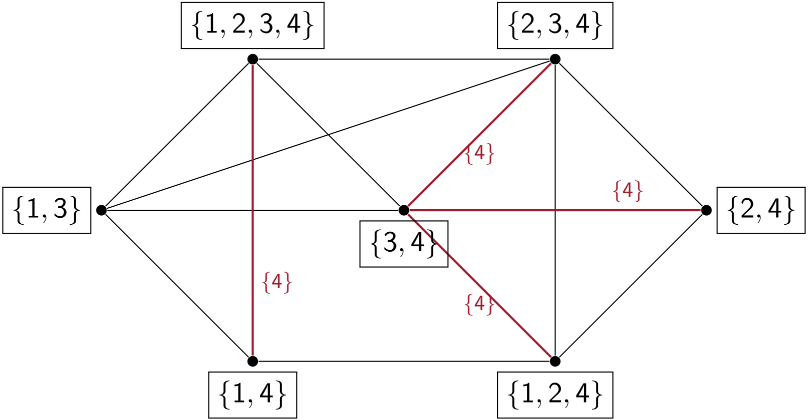
Si H est un super-graphe d'arêtes de G, alors $\chi_\cup(H) \leq \chi_\cup(G) + 1$.



Lemme

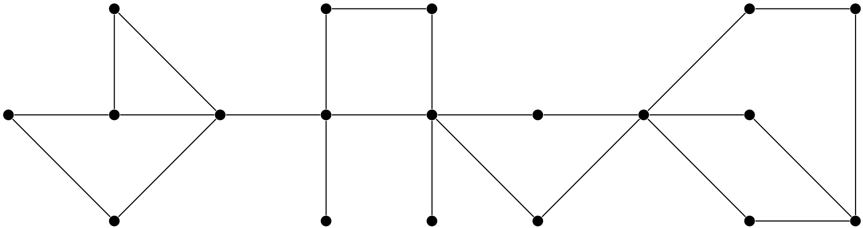
Lemme

Si H est un super-graphe d'arêtes de G, alors $\chi_\cup(H) \leq \chi_\cup(G) + 1$.



Preuve

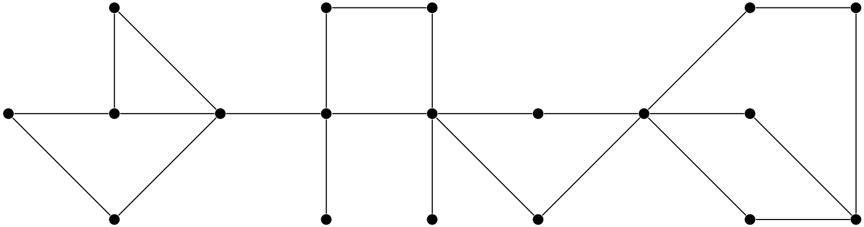
Depuis un graphe G :



Preuve

Depuis un graphe G :

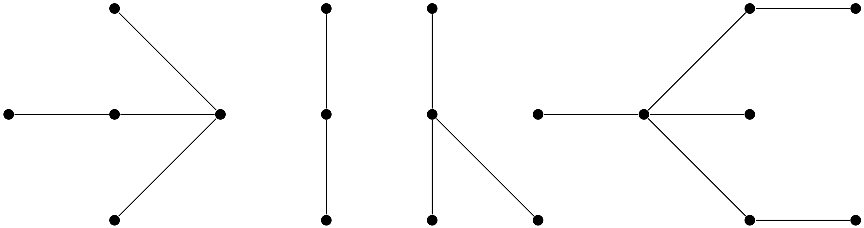
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;



Preuve

Depuis un graphe G :

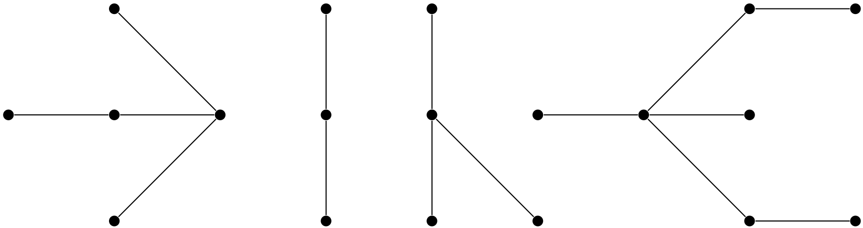
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;



Preuve

Depuis un graphe G :

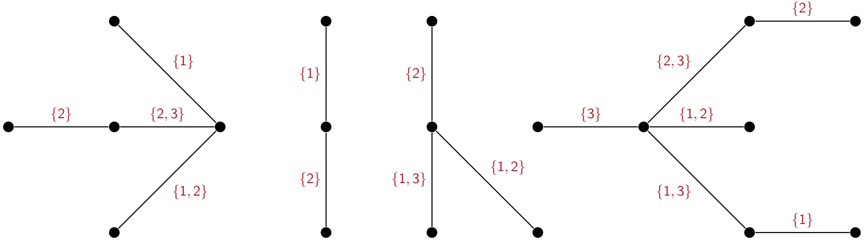
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;



Preuve

Depuis un graphe G :

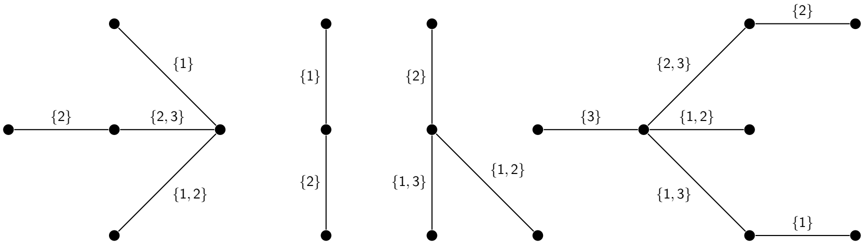
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;



Preuve

Depuis un graphe G :

1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;
3. Colorer leur union disjointe, H, avec le nombre optimal de couleurs plus une ;



Preuve

Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

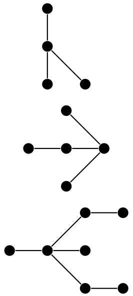
Preuve

Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

3	4-7	8-15	16-31

Preuve

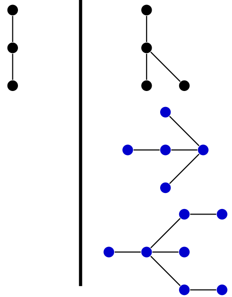
Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

3	4-7	8-15	16-31
			

Preuve

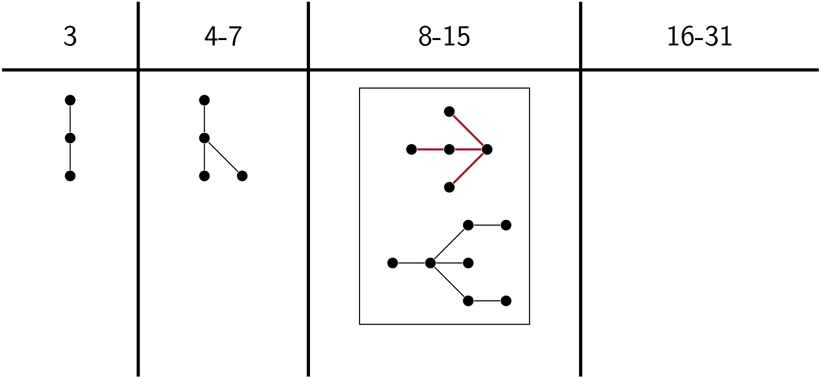
Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

3	4-7	8-15	16-31



Preuve

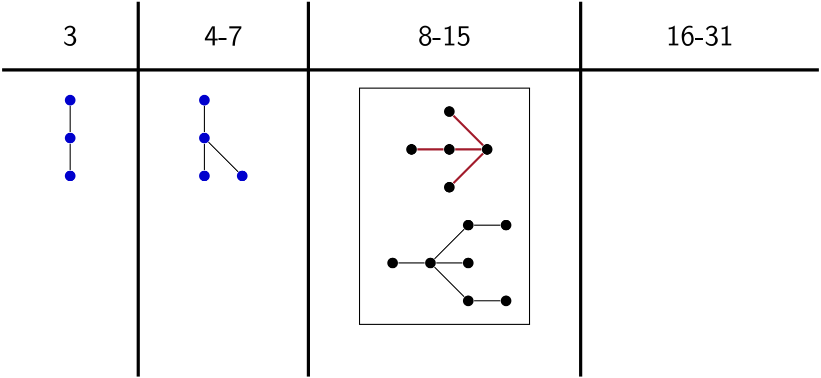
Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :



Couleur 4 ajoutée

Preuve

Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

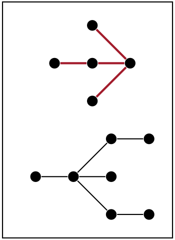


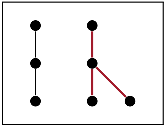
Couleur 4 ajoutée

Preuve

Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

3	4-7	8-15	16-31

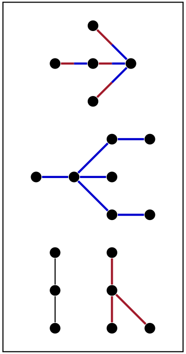




Couleur 4 ajoutée

Preuve

Colorer l'union disjointe d'étoiles subdivisées au plus une fois avec le nombre optimal de couleurs plus une :

3	4-7	8-15	16-31
			

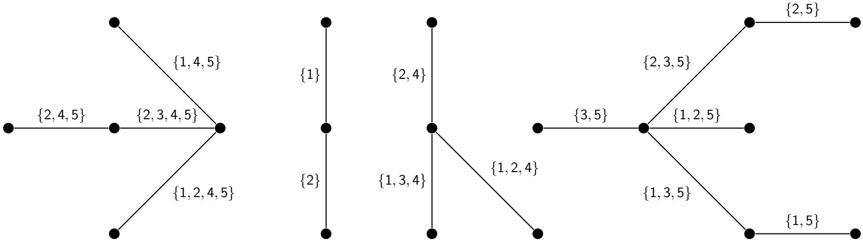
Couleur 4 ajoutée

Couleur 5 ajoutée

Preuve

Depuis un graphe G :

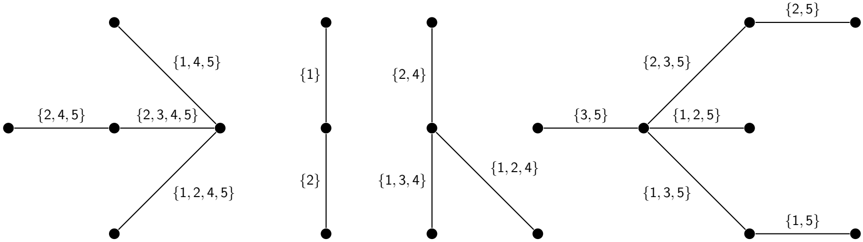
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;
3. Colorer leur union disjointe, H, avec le nombre optimal de couleurs plus une ;



Preuve

Depuis un graphe G :

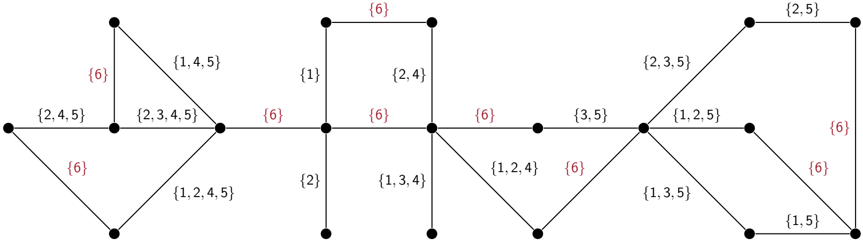
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;
3. Colorer leur union disjointe, H, avec le nombre optimal de couleurs plus une ;
4. Colorer G avec le nombre optimal de couleurs plus deux en utilisant une nouvelle couleur pour les arêtes de $G \setminus H$.



Preuve

Depuis un graphe G :

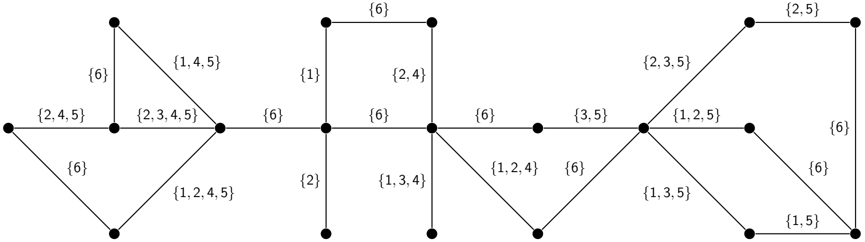
1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;
3. Colorer leur union disjointe, H, avec le nombre optimal de couleurs plus une ;
4. Colorer G avec le nombre optimal de couleurs plus deux en utilisant une nouvelle couleur pour les arêtes de $G \setminus H$.



Preuve

Depuis un graphe G :

1. Extraire H, forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et sous-graphe d'arêtes de G ;
2. Colorer optimalement chaque composante de H ;
3. Colorer leur union disjointe, H, avec le nombre optimal de couleurs plus une ;
4. Colorer G avec le nombre optimal de couleurs plus deux en utilisant une nouvelle couleur pour les arêtes de $G \setminus H$.



Résumé

Résumé

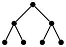
Théorème

Pour tout graphe $G(V, E)$, on a
$\lceil \log_2(|V|+1) \rceil \leq \chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 2.$

Résumé

Théorème

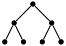
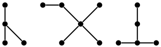
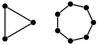
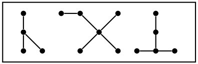
Pour tout graphe $G(V,E)$, on a
$\lceil \log_2(|V|+1) \rceil \leq \chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 2$.

$\chi_\cup(G)$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 1$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 2$
	Chemins  Cycles  Arbres binaires complets 	K_{2^k-1}  C_3, C_7  	

Résumé

Théorème

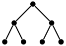
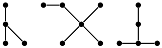
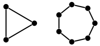
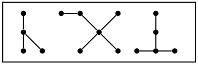
Pour tout graphe $G(V, E)$, on a
$\lceil \log_2(|V|+1) \rceil \leq \chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 2$.

$\chi_\cup(G)$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 1$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 2$
	Chemins  Cycles  Arbres binaires complets  Étoiles subdivisées au plus une fois 	K_{2^k-1}  C_3, C_7  Forêt d'étoiles subdi- -visées au plus une fois 	

Résumé

Théorème

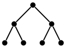
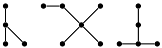
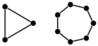
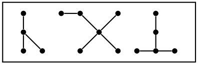
Pour tout graphe $G(V,E)$, on a
$\lceil \log_2(|V|+1) \rceil \leq \chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 2$.

$\chi_\cup(G)$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 1$	$\lceil \log_2(\lvert V(G)\rvert+1) \rceil + 2$
	Chemins  Cycles  Arbres binaires complets  Étoiles subdivisées au plus une fois 	K_{2^k-1}  C_3, C_7  Forêt d'étoiles subdi- -visées au plus une fois  Graphes hamiltoniens Super-graphes d'arêtes d'étoiles subdivisées au plus une fois	

Résumé

Théorème

Pour tout graphe $G(V, E)$, on a
$\lceil \log_2(|V| + 1) \rceil \leq \chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 2.$

$\chi_\cup(G)$	$\lceil \log_2(\lvert V(G) \rvert + 1) \rceil$	$\lceil \log_2(\lvert V(G) \rvert + 1) \rceil + 1$	$\lceil \log_2(\lvert V(G) \rvert + 1) \rceil + 2$
	Chemins  Cycles  Arbres binaires complets  Étoiles subdivisées au plus une fois 	K_{2^k-1}  C_3, C_7  Forêt d'étoiles subdi- -visées au plus une fois  Graphes hamiltoniens Super-graphes d'arêtes d'étoiles subdivisées au plus une fois	?

Problèmes ouverts

Problèmes ouverts

Conjecture

Pour tout graphe $G(V, E)$, on a $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 1$.

Problèmes ouverts

Conjecture

Pour tout graphe $G(V, E)$, on a $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 1$.

Pistes

1. Prouver que tout arbre peut être optimalement coloré (cas connexe).
2. Prouver que toute forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois peut être optimalement colorée.

Problèmes ouverts

Conjecture

Pour tout graphe $G(V, E)$, on a $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 1$.

Pistes

1. Prouver que tout arbre peut être optimalement coloré (cas connexe).
2. Prouver que toute forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois peut être optimalement colorée.

Variantes

1. Avec une coloration propre ?
2. En n'identifiant que les sommets adjacents ?

Problèmes ouverts

Conjecture

Pour tout graphe $G(V,E)$, on a $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V|+1) \rceil + 1$.

Pistes

1. Prouver que tout arbre peut être optimalement coloré (cas connexe).
2. Prouver que toute forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois peut être optimalement colorée.

Variantes

1. Avec une coloration propre ?
2. En n'identifiant que les sommets adjacents ?