

Équilibrabilité et nombre d'équilibrage des cycles

Antoine Dailly¹, Laura Eslava²,
Adriana Hansberg¹, Denae Ventura¹

¹ Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique

² IIMAS, UNAM Ciudad Universitaria, Mexique



Contexte

Théorie des graphes extrémaux

Densité minimale garantissant une propriété.

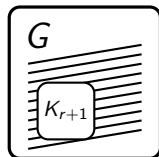
Contexte

Théorie des graphes extrémaux

Densité minimale garantissant une propriété.

Théorème de Turán (1941)

Si G d'ordre n contient strictement plus de $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$ arêtes, alors G contient un K_{r+1} .



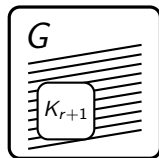
Contexte

Théorie des graphes extrémaux

Densité minimale garantissant une propriété.

Théorème de Turán (1941)

Si G d'ordre n contient strictement plus de $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$ arêtes, alors G contient un K_{r+1} .



Théorie de Ramsey

Garantir des sous-structures ordonnées au sein de grandes structures chaotiques.

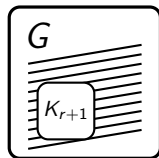
Contexte

Théorie des graphes extrémaux

Densité minimale garantissant une propriété.

Théorème de Turán (1941)

Si G d'ordre n contient strictement plus de $(1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2}$ arêtes, alors G contient un K_{r+1} .

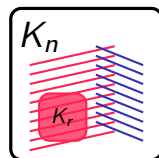


Théorie de Ramsey

Garantir des sous-structures ordonnées au sein de grandes structures chaotiques.

Théorème de Ramsey (1930)

Pour tout r , si n est suffisamment grand, alors toute 2-coloration des arêtes de K_n contient un K_r monochromatique.



Dans toute cette présentation, on considère des 2-colorations des arêtes de K_n , *i.e.* des partitions de ses arêtes : $E(K_n) = R \sqcup B$.

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

On cherche à **garantir** l'existence d'une (r, b) -copie de G
(pour $r > 0$ donné).

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

On cherche à **garantir** l'existence d'une (r, b) -copie de G
(pour $r > 0$ donné).

⇒ Besoin d'une certaine **densité de chaque classe de couleur**.

r -tonalité

Définition

Une (r, b) -copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B .

⇒ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$ -copie ou une $(|E|, 0)$ -copie de G .

On cherche à **garantir** l'existence d'une (r, b) -copie de G
(pour $r > 0$ donné).

⇒ Besoin d'une certaine **densité de chaque classe de couleur**.

r -tonalité

Si, pour tout n suffisamment grand, il existe un $k(n, r)$ tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n avec $|R|, |B| > k(n, r)$ contient une (r, b) -copie de G , alors G est **r -tonal**.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

Équilibrabilité : quand $r = \lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \{ \lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor, \lceil \frac{|E|}{2} \rceil \}$.

Équilibrabilité

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\text{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit **équilibrable**.

Équilibrabilité : quand $r = \lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \{ \lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor, \lceil \frac{|E|}{2} \rceil \}$.

Équilibrabilité

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\text{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit **équilibrable** et $\text{bal}(n, G)$ est appelé son **nombre d'équilibrage**.

Équilibrabilité : quand $r = \lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor$

Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de $G(V, E)$ est une (r, b) -copie de G avec $r \in \{ \lfloor \frac{|E|}{2} \rfloor, \lceil \frac{|E|}{2} \rceil \}$.

Équilibrabilité

Soit $\text{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G .

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\text{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit **équilibrable** et $\text{bal}(n, G)$ est appelé son **nombre d'équilibrage**.

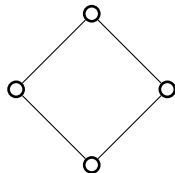
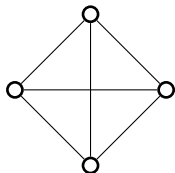
Problème type Ramsey

Problème type extrémal

Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

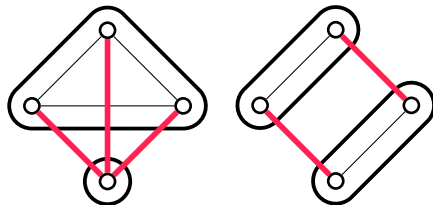


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;

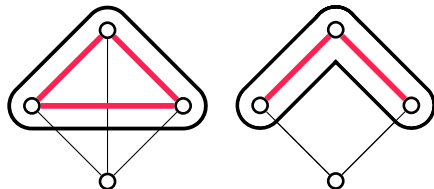


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

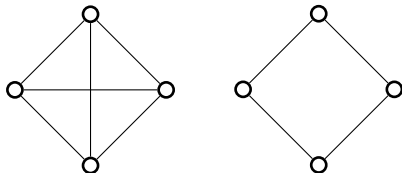


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.



⇒ La preuve donne une borne supérieure subquadratique pour $\text{bal}(n, G)$ si G est équilibrable.

Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !

Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
 - ▶ Les arbres sont équilibrables
 - ▶ $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \left(\frac{k-2}{2}\right)n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
 - ▶ $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
 - ▶ $\triangle P_k$ désigne le chemin sur k arêtes (désolé ☹)

Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
 - ▶ Les arbres sont équilibrables
 - ▶ $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \left(\frac{k-2}{2}\right)n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
 - ▶ $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
⚠ P_k désigne le chemin sur k arêtes (désolé 😊)
- ▶ Caro, Lauri, Zarb (2020)
 - ▶ Nombres d'équilibrage des graphes sur au plus 4 arêtes

Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
 - ▶ $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
 - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
 - ▶ Les arbres sont équilibrables
 - ▶ $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \left(\frac{k-2}{2}\right) n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
 - ▶ $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
⚠ P_k désigne le chemin sur k arêtes (désolé 😊)
- ▶ Caro, Lauri, Zarb (2020)
 - ▶ Nombres d'équilibrage des graphes sur au plus 4 arêtes

→ Nous allons étudier les cycles.

Nos résultats

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- ▶ C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- ▶ $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable
- ▶ C_{4k} est équilibrable

Nos résultats

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- ▶ C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- ▶ $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et
 $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;
- ▶ C_{4k} est équilibrable

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- ▶ C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- ▶ $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;
- ▶ C_{4k} est équilibrable, et $(k-1)n - (k-1)^2 \leq \text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$.

Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

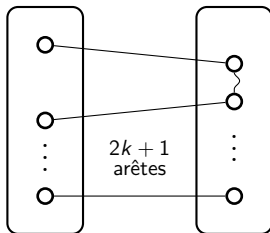
Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

C_{4k+2} a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



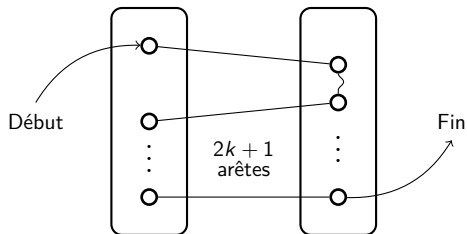
Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

C_{4k+2} a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

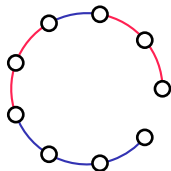
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré \Rightarrow
2k arêtes de chaque couleur

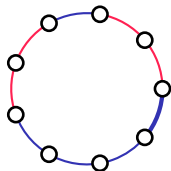
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré \Rightarrow
2k arêtes de chaque couleur

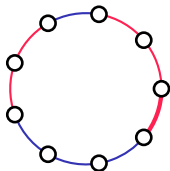
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré \Rightarrow
 $2k$ arêtes de chaque couleur

On peut refermer le cycle
qui sera équilibré

Cycles impairs

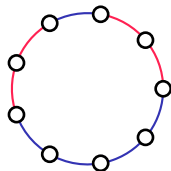
Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré \Rightarrow
Une couleur avec $2k+1$ arêtes



Cycles impairs

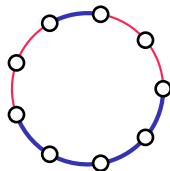
Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré \Rightarrow
Une couleur avec $2k+1$ arêtes



Cycles impairs

Proposition

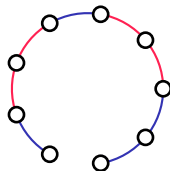
Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré \Rightarrow
Une couleur avec $2k+1$ arêtes

En retirer une donne
un P_{4k} équilibré



Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.

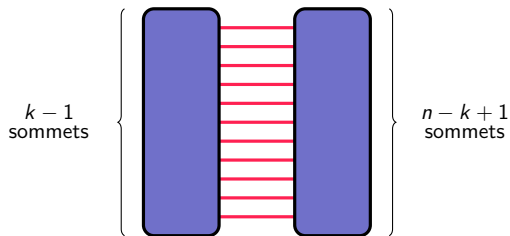
Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.



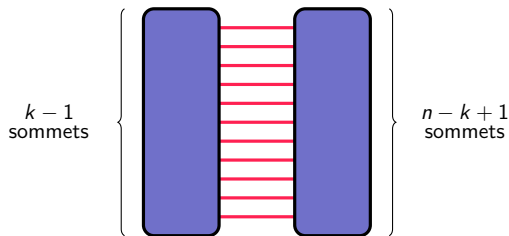
Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.



\Rightarrow Un cycle ne peut avoir qu'au plus $2k - 2$ arêtes dans R .

Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

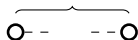
Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

$|R|, |B| > \text{bal}(n, P_{4k-2}) \Rightarrow$ Il y a un P_{4k-2} équilibré.

$4k - 1$ sommets



Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

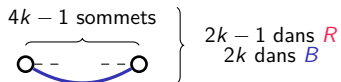
Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

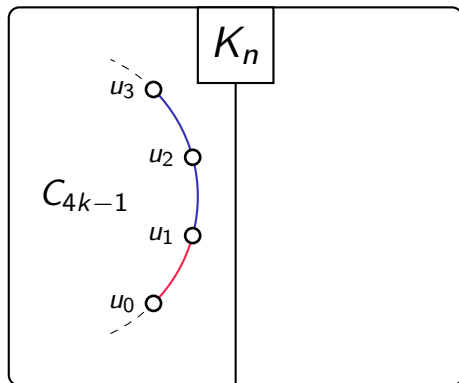
$|R|, |B| > \text{bal}(n, P_{4k-2}) \Rightarrow$ Il y a un P_{4k-2} équilibré.

\Rightarrow On le ferme avec (wlog) une B



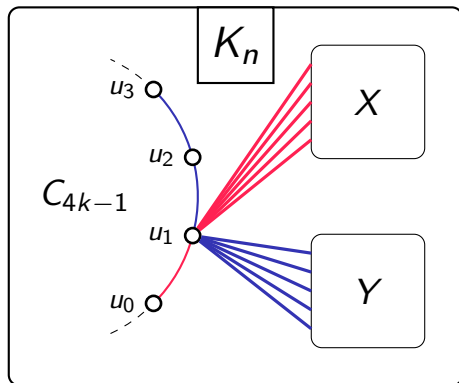
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



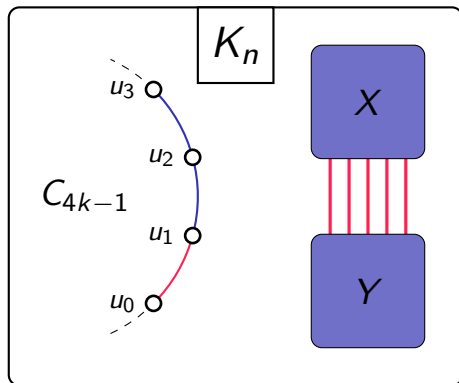
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

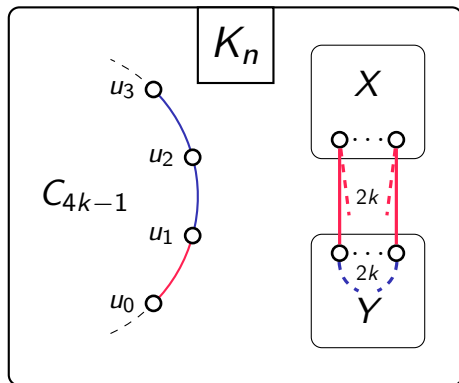
Preuve par contradiction (suite)



Des lemmes forcent les couleurs de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(X, Y)$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

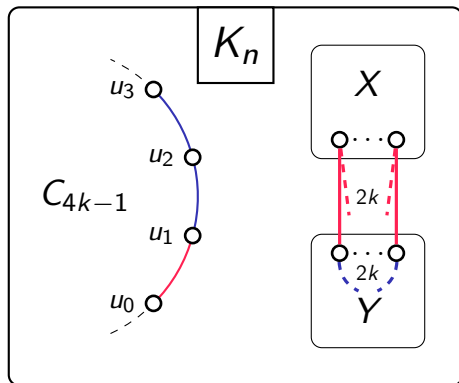
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir $|X|, |Y| \geq k$

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

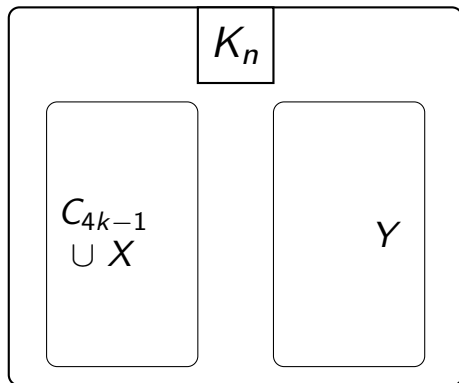
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir $|X|, |Y| \geq k \Rightarrow$ wlog, supposons $|X| < k$

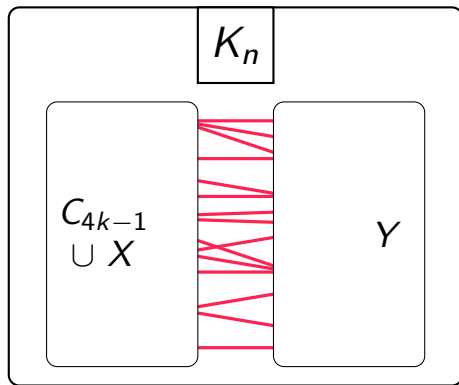
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

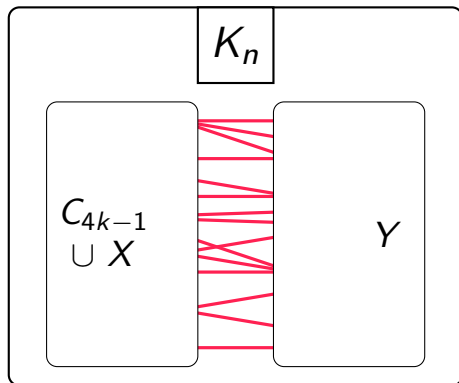
Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

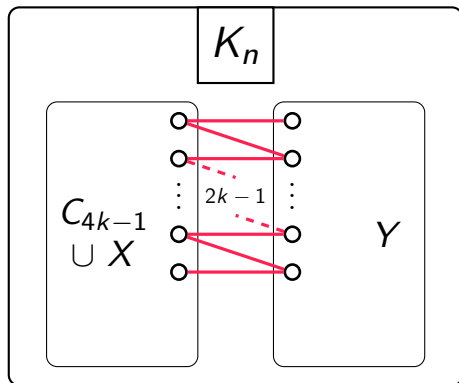


Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $\text{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13]

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

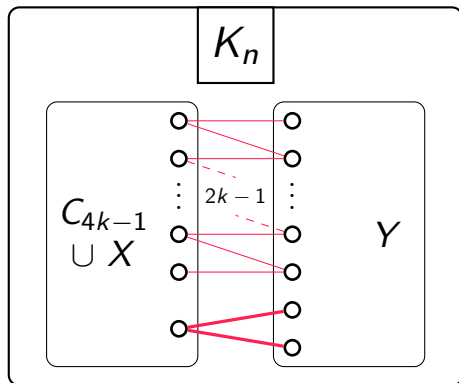


Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $ex(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] \Rightarrow Il contient un P_{2k-1} .

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



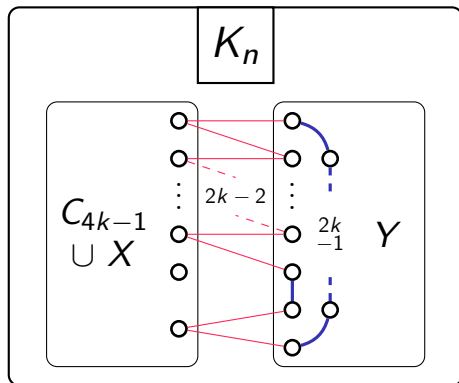
Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $ex(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] \Rightarrow Il contient un P_{2k-1} .

Il reste suffisamment d'arêtes dans R pour avoir un $K_{1,2}$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.


Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes; or $ex(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] \Rightarrow Il contient un P_{2k-1} .


Il reste suffisamment d'arêtes dans R pour avoir un $K_{1,2}$.

On complète avec des arêtes dans Y , qui seront dans B , et on obtient un C_{4k} équilibré.


\Rightarrow Contradiction

Conclusion et perspective : vers les circulants ?


 Équilibrable


 Non-équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$


 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

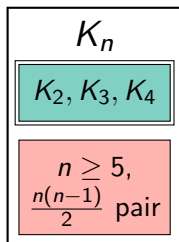
Conclusion et perspective : vers les circulants ?

 Équilibrable

 Non-équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$



[Caro, Hansberg,
Montejano, 2019]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]

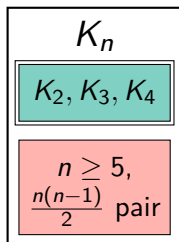
Conclusion et perspective : vers les circulants ?

Équilibrable

valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

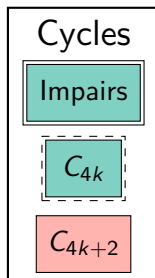
Non-équilibrable

bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$




[Caro, Hansberg,
Montejano, 2019]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]





[D., Eslava, Hansberg,
Ventura, 2020+]

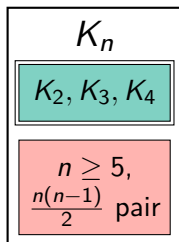
Conclusion et perspective : vers les circulants ?

 Équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

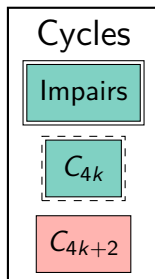
 Non-équilibrable

 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

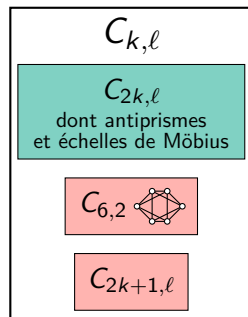


[Caro, Hansberg,
Montejano, 2019]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]




[D., Eslava, Hansberg,
Ventura, 2020+]





[D., Hansberg, Ventura, 2020+]

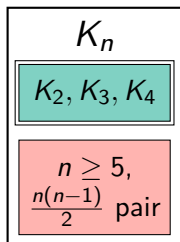
Conclusion et perspective : vers les circulants ?

 Équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

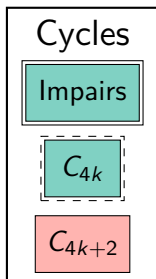
 Non-équilibrable

 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

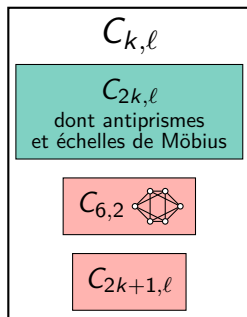


[Caro, Hansberg,
Montejano, 2019]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]



[D., Eslava, Hansberg,
Ventura, 2020+]




[D., Hansberg, Ventura, 2020+]


Perspectives


- ▶ Caractérisation des circulants équilibrables
- ▶ Nombre d'équilibrage

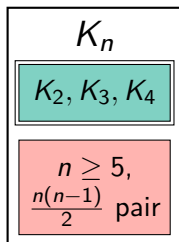
Conclusion et perspective : vers les circulants ?

 Équilibrable

 valeur exacte de $\text{bal}(n, G)$

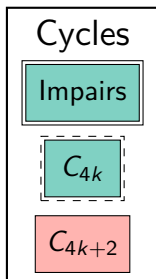
 Non-équilibrable

 bornes non-triviales pour $\text{bal}(n, G)$

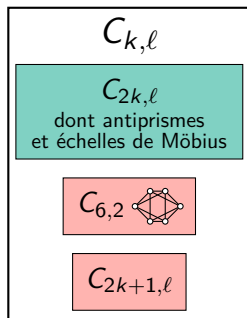


[Caro, Hansberg,
Montejano, 2019]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]



[D., Eslava, Hansberg,
Ventura, 2020+]



[D., Hansberg, Ventura, 2020+]

Perspectives

- ▶ Caractérisation des circulants équilibrables
- ▶ Nombre d'équilibrage

