Isometric Path Cover : complexité et algorithmes sur les graphes cordaux

Dibyayan Chakraborty[1], Antoine Dailly[2], Sandip Das[3], Florent Foucaud[2], Harmender Gahlawat[3,4], Subir Kumar Ghosh[5]

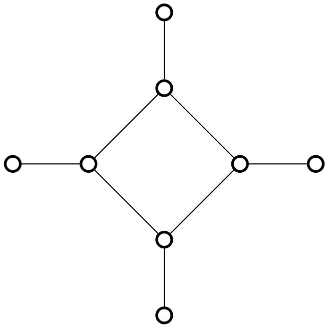
JGA 2022

[1] LIP, Lyon
[2] LIMOS, Clermont-Ferrand
[3] Indian Statistical Institute, Kolkata, Inde
[4] Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel
[5] Ramakrishna Mission Vivekananda Edu. and Res. Institute, Kolkata, Inde

Définitions

Isometric Path Cover

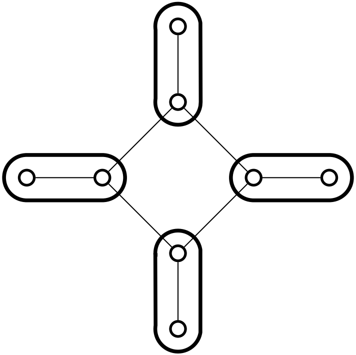
Un ensemble de plus courts chemins couvrant tous les sommets d'un graphe.



Définitions

Isometric Path Cover

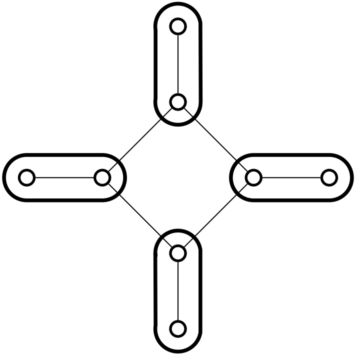
Un ensemble de plus courts chemins couvrant tous les sommets d'un graphe.



Définitions

Isometric Path Cover

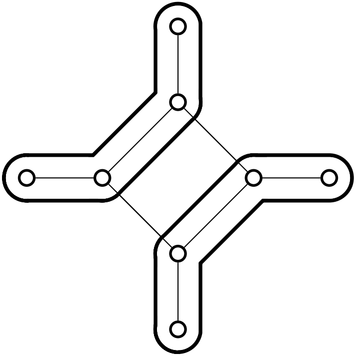
Un ensemble de plus courts chemins couvrant tous les sommets d'un graphe.
On cherche à minimiser le nombre de chemins.



Définitions

Isometric Path Cover

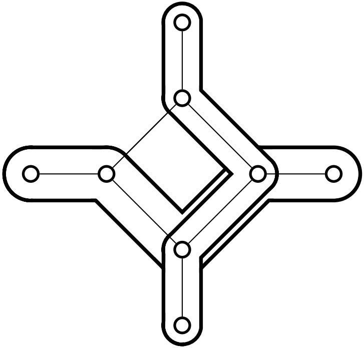
Un ensemble de plus courts chemins couvrant tous les sommets d'un graphe.
On cherche à minimiser le nombre de chemins.



Définitions

Isometric Path Cover

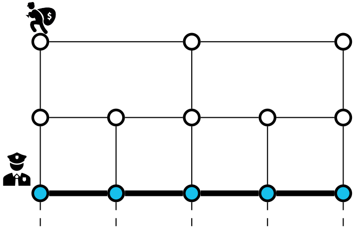
Un ensemble de plus courts chemins couvrant tous les sommets d'un graphe.
On cherche à minimiser le nombre de chemins.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

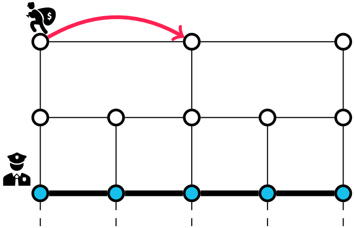
Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

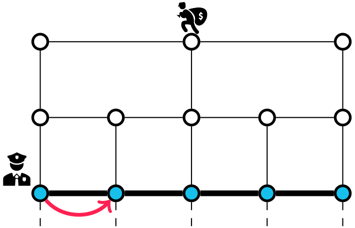
Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

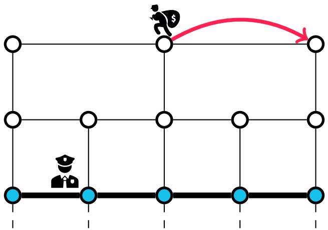
Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

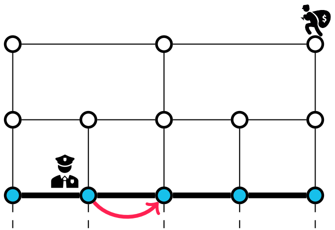
Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

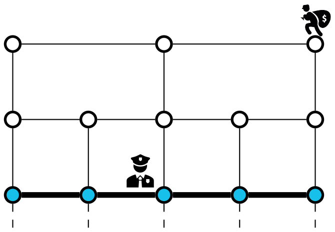
Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.



Contexte : jeux de poursuite-évasion

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.

$\Rightarrow$ La taille minimale d'une Isometric Path Cover est une borne supérieure pour le nombre de policiers nécessaire

Contexte : problèmes liés

Lemme [Aigner & Fromme, 1983]

Dans un jeu de poursuite, un policier peut « protéger » un plus court chemin.

$\Rightarrow$ La taille minimale d'une Isometric Path Cover est une borne supérieure pour le nombre de policiers nécessaire

Couverture :

- PATH COVER (NP-complet)

Packing :

- k DISJOINT PATHS (NP-complet [Karp, 1975], polyomial pour k fixé [Robertson & Seymour, 1995])
- k DISJOINT SHORTEST PATHS (W[1]-dur, algo XP en $O(kn^{16k \cdot k! + k + 1})$ [Bentert *et al.*, 2021])

État de l'art sur Isometric Path Cover

Étonnamment peu de résultats !

État de l'art sur Isometric Path Cover

Étonnamment peu de résultats !

Valeurs exactes

- Arbres, cycles, graphes bipartis complets, certains produits cartésiens de chemins [Fitzpatrick, 1997 & 1999]
- Graphes k-partis complets [Pan & Chang, 2006]
- Divers produits cartésiens [Manuel, 2018]

État de l'art sur Isometric Path Cover

Étonnamment peu de résultats !

Valeurs exactes

- Arbres, cycles, graphes bipartis complets, certains produits cartésiens de chemins [Fitzpatrick, 1997 & 1999]
- Graphes k-partis complets [Pan & Chang, 2006]
- Divers produits cartésiens [Manuel, 2018]

Algorithmes

- Algorithme linéaire pour les arbres de cliques [Pan & Chang, 2005]
- $\log(d)$-approximation (algorithme polynomial) pour graphes de diamètre d [Thiessen & Gaertner, 2021]
- Algorithme XP pour k fixé [Dumas, Foucaud, Perez, Todinca, 2022]

Nos résultats

Nos résultats

Complexité

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

Nos résultats

Complexité

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

Approximation

Algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour les graphes cordaux.

Nos résultats

Complexité

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

Approximation

Algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour les graphes cordaux.

FPT

Algorithme exact en $2^{k2^{\mathcal{O}(w)}}n$ et $2^{2^{\mathcal{O}(k)}}n$ sur les graphes cordaux (k taille de la solution, w treewidth).

NP-complétude

Théorème [CDDFGG, 2022]

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

NP-complétude

Théorème [CDDFGG, 2022]

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

Preuve

Réduction depuis Induced P_3-Partition (NP-complet même sur les graphes cordaux avec $3k$ sommets [van Bevern *et al.*, 2017])

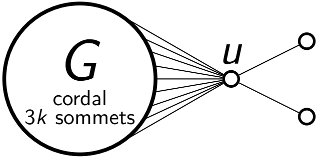
NP-complétude

Théorème [CDDFGG, 2022]

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

Preuve

Réduction depuis Induced P_3-Partition (NP-complet même sur les graphes cordaux avec $3k$ sommets [van Bevern *et al.*, 2017])



On cherche une Isometric Path Cover de taille $k+1$.

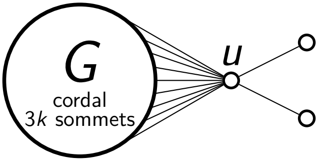
NP-complétude

Théorème [CDDFGG, 2022]

Isometric Path Cover est NP-complet, même sur les graphes cordaux avec un sommet universel.

Preuve

Réduction depuis Induced P_3-Partition (NP-complet même sur les graphes cordaux avec $3k$ sommets [van Bevern *et al.*, 2017])



On cherche une Isometric Path Cover de taille $k + 1$.

Observation

Montre aussi la NP-complétude de Isometric Path Partition !

Approximation

Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour Isometric Path Cover sur les graphes cordaux.

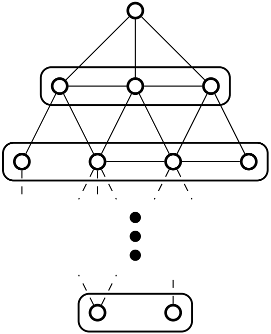
Approximation

Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour Isometric Path Cover sur les graphes cordaux.

Algorithme et preuve

1. Faire un BFS de G



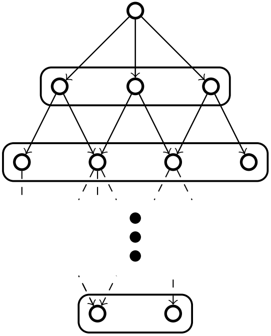
Approximation

Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour ISOMETRIC PATH COVER sur les graphes cordaux.

Algorithme et preuve

1. Faire un BFS de G
2. Graphe de parcours $\equiv$ diagramme de Hasse d'un poset



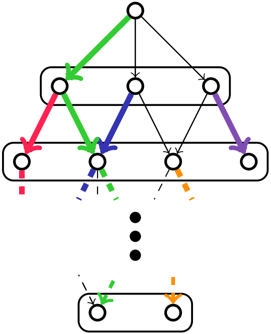
Approximation

Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour Isometric Path Cover sur les graphes cordaux.

Algorithme et preuve

1. Faire un BFS de G
2. Graphe de parcours $\equiv$ diagramme de Hasse d'un poset $\Rightarrow$ Couverture par chaines du poset $\mathcal{C}_{\min}$ [Fulkerson, 1956]



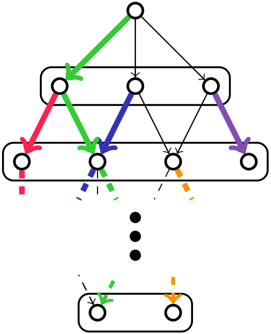
Approximation

Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour Isometric Path Cover sur les graphes cordaux.

Algorithme et preuve

1. Faire un BFS de G
2. Graphe de parcours $\equiv$ diagramme de Hasse d'un poset $\Rightarrow$ Couverture par chaines du poset $\mathcal{C}_{\min}$ [Fulkerson, 1956]
3. Lemme : un plus court chemin du graphe contient au plus quatre sommets d'une même antichaine A



Approximation

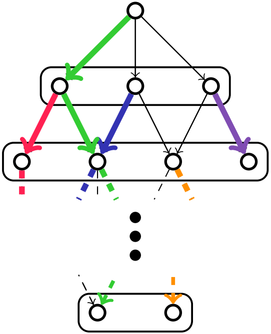
Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour ISOMETRIC PATH COVER sur les graphes cordaux.

Algorithme et preuve

1. Faire un BFS de G
2. Graphe de parcours $\equiv$ diagramme de Hasse d'un poset $\Rightarrow$ Couverture par chaines du poset $\mathcal{C}_{\min}$ [Fulkerson, 1956]
3. Lemme : un plus court chemin du graphe contient au plus quatre sommets d'une même antichaine A
4. $|\mathcal{C}_{\min}| = |A_{\max}|$ [Dilworth, 1950]

   $\leq 4 \cdot OPTI$



Approximation

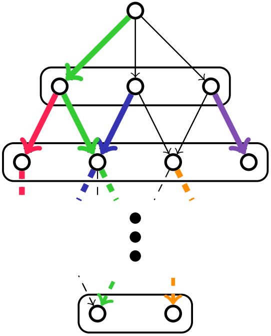
Théorème [CDDFGG, 2022]

Il existe un algorithme polynomial donnant une 4-approximation pour Isometric Path Cover sur les graphes cordaux.

Algorithme et preuve

1. Faire un BFS de G
2. Graphe de parcours $\equiv$ diagramme de Hasse d'un poset $\Rightarrow$ Couverture par chaines du poset $\mathcal{C}_{\min}$ [Fulkerson, 1956]
3. Lemme : un plus court chemin du graphe contient au plus quatre sommets d'une même antichaine A
4. $|\mathcal{C}_{\min}| = |A_{\max}|$ [Dilworth, 1950]

   $\leq 4 \cdot OPTI$



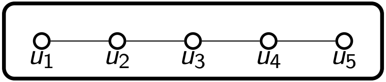
Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

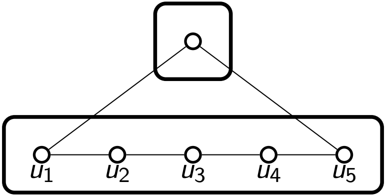
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

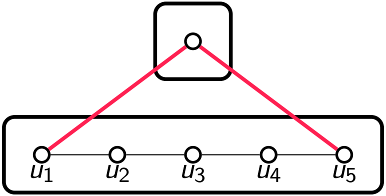
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

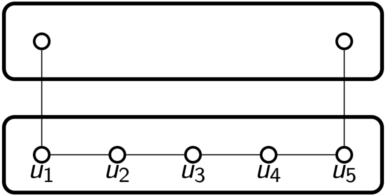


Impossible car $u_1, \ldots, u_5$ dans plus court chemin

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

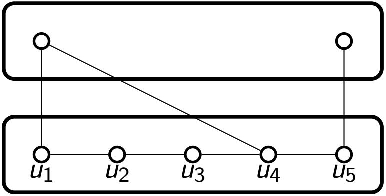
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

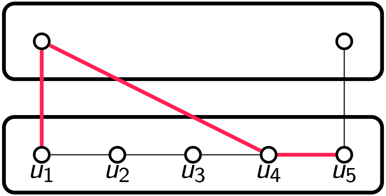
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

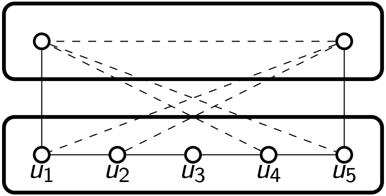


Impossible car $u_1, \ldots, u_5$ dans plus court chemin

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

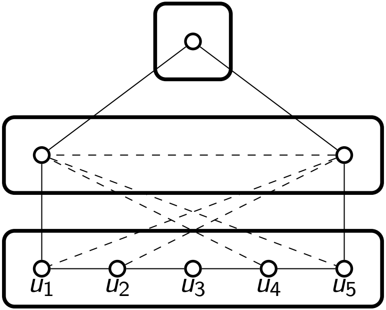
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

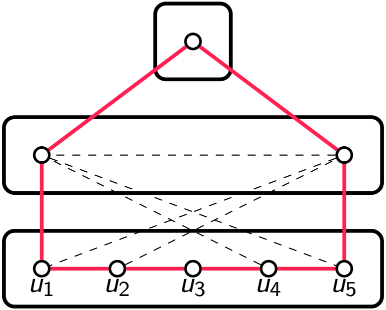
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

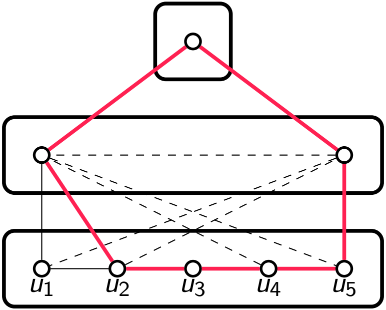


Impossible car graphe cordal

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

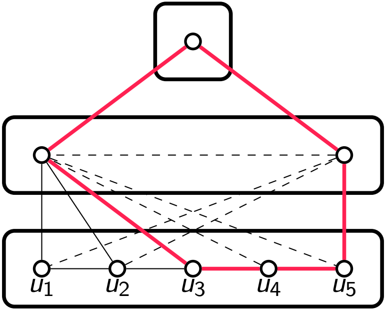


Impossible car graphe cordal

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

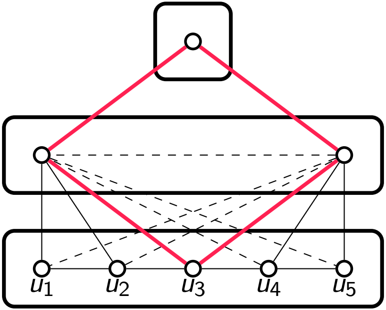


Impossible car graphe cordal

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

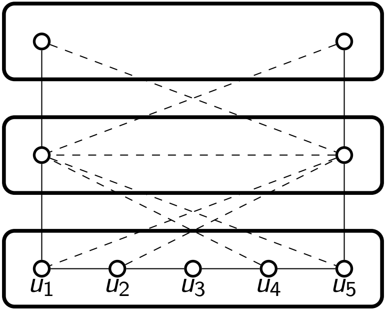


Impossible car graphe cordal

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

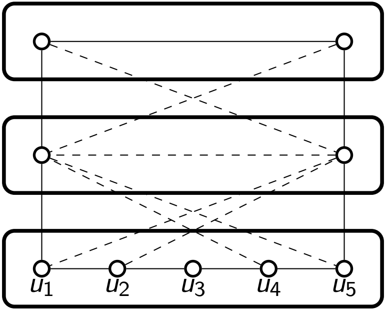
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

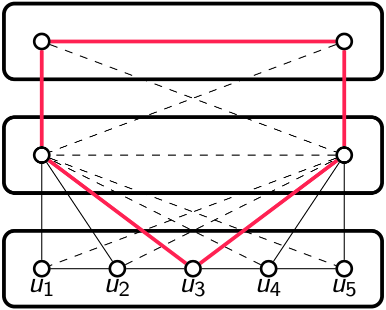
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

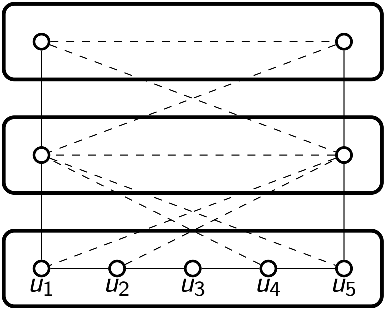


Impossible car graphe cordal

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

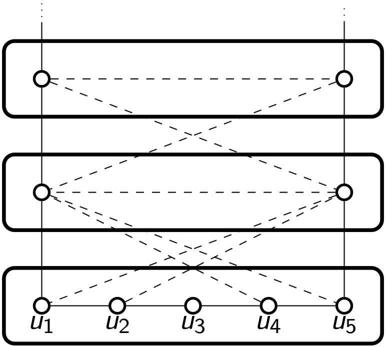
Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours

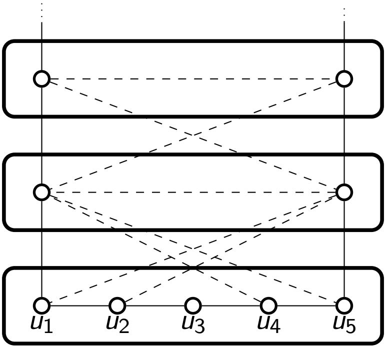


Impossible d'avoir un ancêtre commun $\Rightarrow$ contradiction

Approximation : Preuve partielle du lemme

Preuve par contradiction

Cas 1 : un plus court chemin contient cinq sommets d'une antichaine sur le même niveau de l'arbre de parcours



Impossible d'avoir un ancêtre commun $\Rightarrow$ contradiction

$\rightarrow$ En vrai, technique plus générique pour gérer tous les cas... mais elle utilise le même principe !

Approximation : Extension

Théorème [CDDFGG, 2022]

L'algorithme donne les ratios d'approximation suivants :

- 4 sur les graphes cordaux

Approximation : Extension

Théorème [CDDFGG, 2022]

L'algorithme donne les ratios d'approximation suivants :

- 4 sur les graphes cordaux
- 3 sur les graphes d'intervalles
- 2 sur les graphes d'intervalles propres

Approximation : Extension

Théorème [CDDFGG, 2022]

L'algorithme donne les ratios d'approximation suivants :

- 4 sur les graphes cordaux
- 3 sur les graphes d'intervalles
- 2 sur les graphes d'intervalles propres
- 5 sur les graphes avec un plus court chemin dominant
- $k + 7$ sur les graphes k-cordaux (avec $k \geq 4$)
- $6\ell + 2$ sur les graphes de treelength au plus ℓ

Approximation : Extension

Théorème [CDDFGG, 2022]

L'algorithme donne les ratios d'approximation suivants :

- 4 sur les graphes cordaux $\rightarrow$ tight
- 3 sur les graphes d'intervalles $\rightarrow$ tight
- 2 sur les graphes d'intervalles propres $\rightarrow$ tight
- 5 sur les graphes avec un plus court chemin dominant
- $k + 7$ sur les graphes k-cordaux (avec $k \geq 4$)
- $6\ell + 2$ sur les graphes de treelength au plus ℓ

Approximation : Extension

Théorème [CDDFGG, 2022]

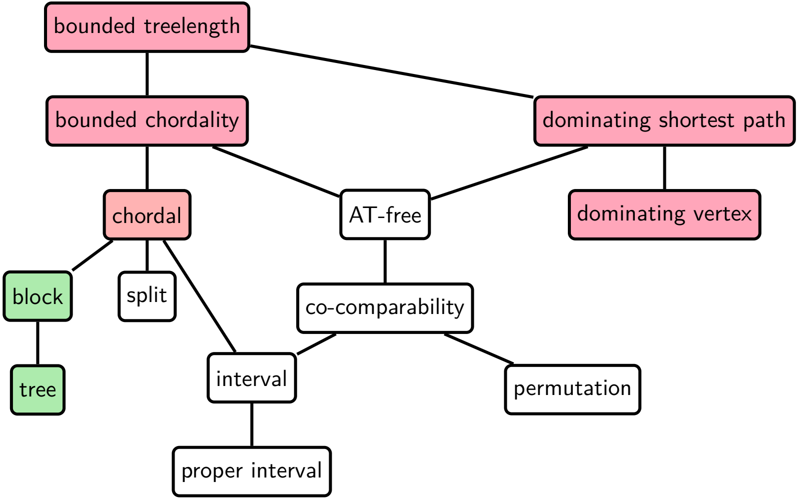
L'algorithme donne les ratios d'approximation suivants :

- 4 sur les graphes cordaux $\rightarrow$ tight
- 3 sur les graphes d'intervalles $\rightarrow$ tight
- 2 sur les graphes d'intervalles propres $\rightarrow$ tight
- 5 sur les graphes avec un plus court chemin dominant
- $k+7$ sur les graphes k-cordaux (avec $k \geq 4$)
- $6\ell + 2$ sur les graphes de treelength au plus ℓ

Observation

L'algorithme ne fonctionne pas pour Isometric Path Partition !

Diagramme de classes



Vert : Polynomial. Rouge : NP-complet. Pour toutes les boites : approximable à facteur constant en temps polynomial.

Conclusion

Contributions à Isometric Path Cover

- NP-complétude sur les graphes cordaux
- Algorithme d'approximation sur diverses classes
- Algorithme FPT par la taille de la solution

Conclusion

Contributions à Isometric Path Cover

- NP-complétude sur les graphes cordaux
- Algorithme d'approximation sur diverses classes
- Algorithme FPT par la taille de la solution
- Extension de NP-complétude et FPT à Isometric Path Partition

Conclusion

Contributions à Isometric Path Cover

- NP-complétude sur les graphes cordaux
- Algorithme d'approximation sur diverses classes
- Algorithme FPT par la taille de la solution
- Extension de NP-complétude et FPT à Isometric Path Partition

Questions ouvertes

- Complexité sur graphes d'intervalles, split...
- Algorithme d'approximation à facteur constant sur tous les graphes ?
- Approximation pour Isometric Path Partition

Conclusion

Contributions à Isometric Path Cover

- NP-complétude sur les graphes cordaux
- Algorithme d'approximation sur diverses classes
- Algorithme FPT par la taille de la solution
- Extension de NP-complétude et FPT à Isometric Path Partition

Questions ouvertes

- Complexité sur graphes d'intervalles, split...
- Algorithme d'approximation à facteur constant sur tous les graphes ?
- Approximation pour Isometric Path Partition