# Jeux de soustraction dans les graphes : Complexité et algorithmes polynomiaux

Antoine Dailly
(Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique)

Avec Laurent Beaudou (LIMOS), Kyle Burke (Plymouth State University),
Pierre Coupechoux (LAAS), Sylvain Gravier (Institut Fourier),
Julien Moncel (LAAS), Aline Parreau (LIRIS), Éric Sopena (LaBRI).

Travaux réalisés dans le cadre de l'ANR GAG.

Séminaire LIFO, 12 octobre 2020

# Plan

# Plan

Petit cours de jeux

- Jeux combinatoires
- Théorie de Sprague-Grundy

Jeux taking-breaking

- Des variantes de NIM
- Passage aux graphes

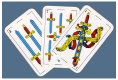
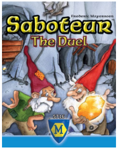
Jeux de soustraction dans les graphes

- Complexité
- Algorithmes polynomiaux

N'hésitez pas à poser des questions !

# Jeux combinatoires

**Définition**

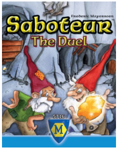




# Jeux combinatoires

**Définition**

1. Jeux à deux joueurs



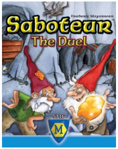


# Jeux combinatoires

**Définition**

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard





# Jeux combinatoires

**Définition**

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite



# Jeux combinatoires

**Définition**

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite
4. Jeux finis, sans égalité

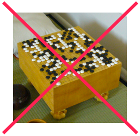


# Jeux combinatoires

**Définition**

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite
4. Jeux finis, sans égalité
5. Le gagnant est déterminé par qui joue le dernier coup



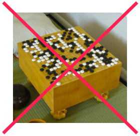


# Jeux combinatoires

**Définition**

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite
4. Jeux finis, sans égalité
5. Le gagnant est déterminé par qui joue le dernier coup

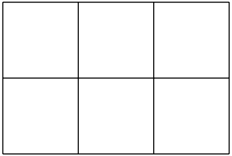




Les joueurs jouent parfaitement !

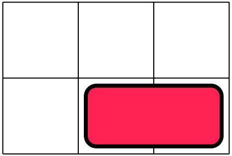
# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



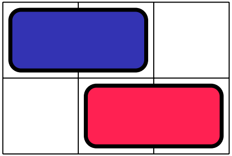
# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



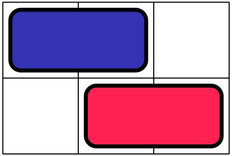
# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



# Jouons !

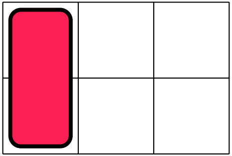
CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



$\Rightarrow$ Victoire du deuxième joueur.

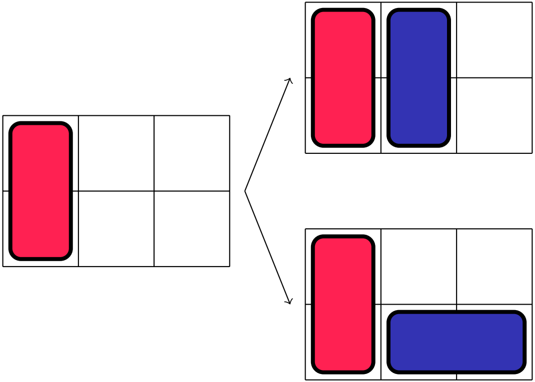
# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



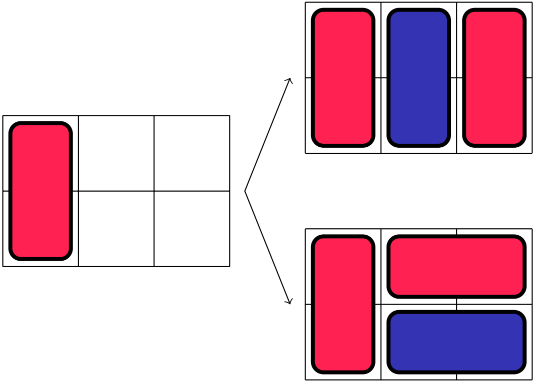
# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



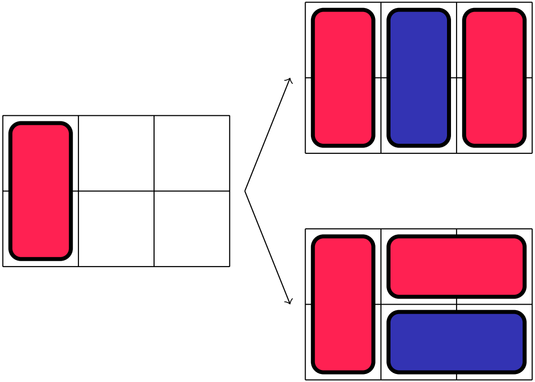
# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



# Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



$\Rightarrow$ Victoire du premier joueur.

# Quelques définitions

**Impartial et partisan**

Un jeu est impartial $\Leftrightarrow$ les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est partisan.

# Quelques définitions

**Impartial et partisan**

Un jeu est impartial $\Leftrightarrow$ les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est partisan.

$\rightarrow$ Ici, jeux impartiaux

# Quelques définitions

**Impartial et partisan**

Un jeu est impartial $\Leftrightarrow$ les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est partisan.

$\rightarrow$ Ici, jeux impartiaux

**Issue**

Un jeu est $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ le premier joueur a une stratégie gagnante.
Sinon, le jeu est $\mathcal{P}$.

# Quelques définitions

**Impartial et partisan**

Un jeu est impartial $\Leftrightarrow$ les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est partisan.

$\rightarrow$ Ici, jeux impartiaux

**Issue**

Un jeu est $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ le premier joueur a une stratégie gagnante.
Sinon, le jeu est $\mathcal{P}$.

## Problématiques des jeux impartiaux

1. Un jeu donné est-il $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$ ?
2. Quelle est la stratégie gagnante ?

# Quelques définitions

**Impartial et partisan**

Un jeu est impartial $\Leftrightarrow$ les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est partisan.

$\rightarrow$ Ici, jeux impartiaux

**Issue**

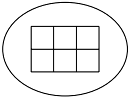
Un jeu est $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ le premier joueur a une stratégie gagnante.
Sinon, le jeu est $\mathcal{P}$.

## Problématiques des jeux impartiaux

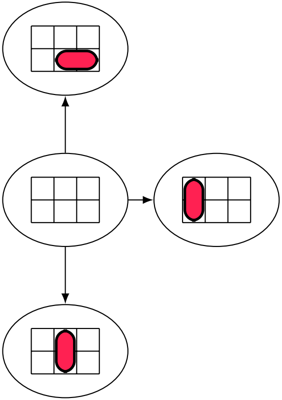
1. Un jeu donné est-il $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$ ?
2. Quelle est la stratégie gagnante ?

$\rightarrow$ Souvent dans PSPACE !

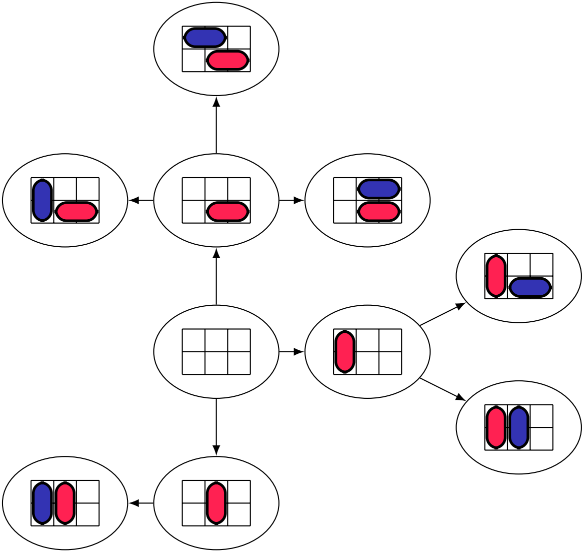
# Un premier algorithme : le graphe de jeu



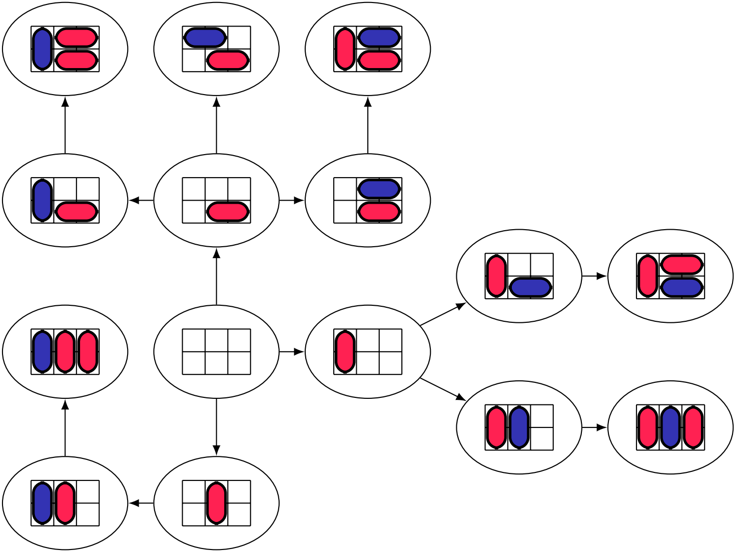
# Un premier algorithme : le graphe de jeu



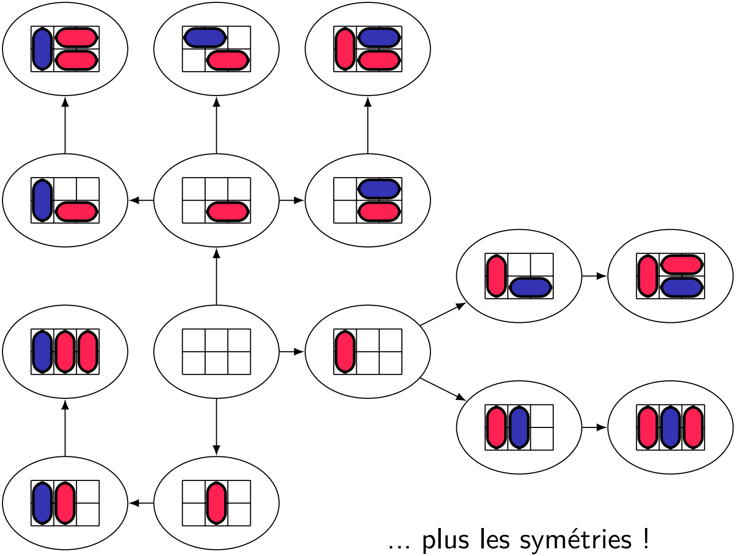
# Un premier algorithme : le graphe de jeu



# Un premier algorithme : le graphe de jeu

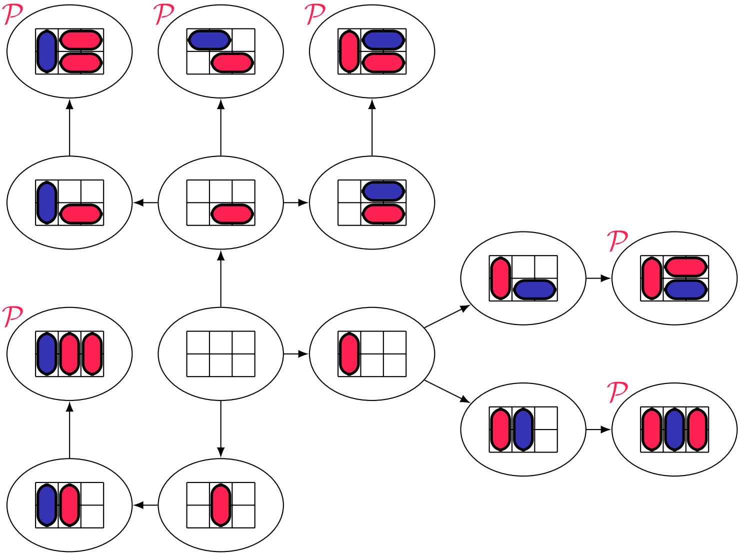


# Un premier algorithme : le graphe de jeu

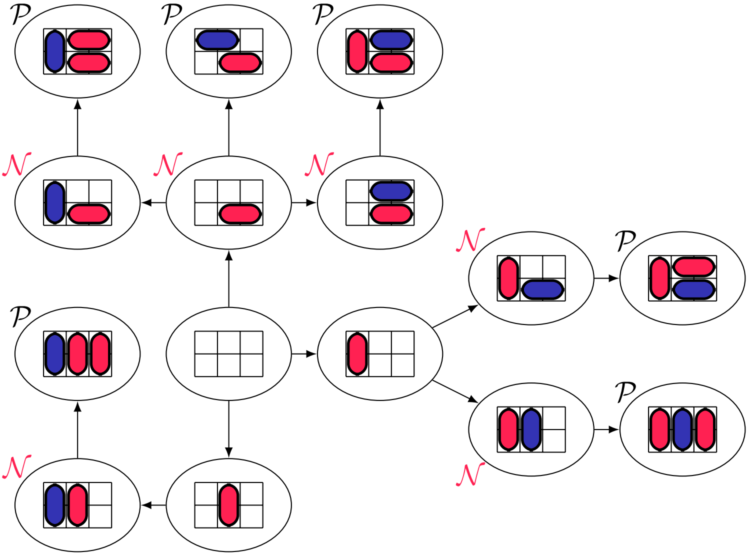


… plus les symétries !

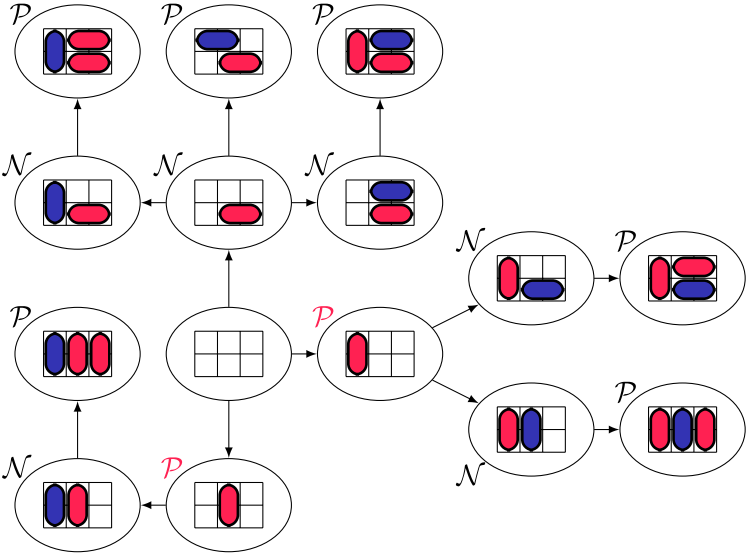
# Un premier algorithme : le graphe de jeu



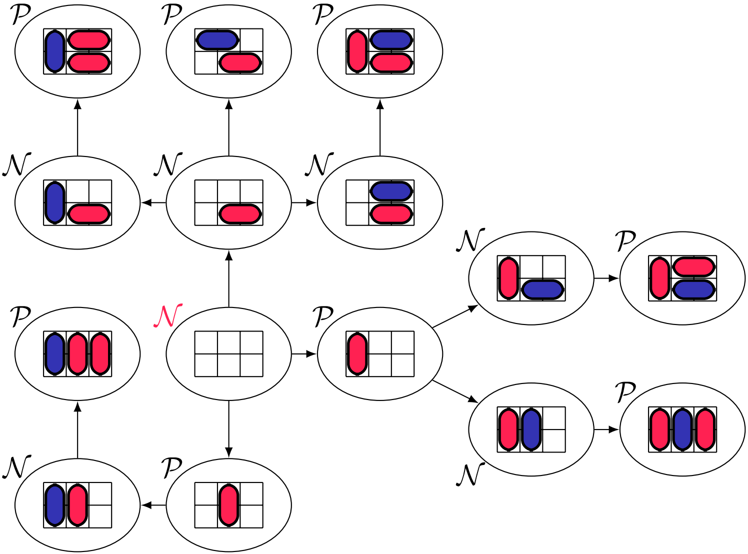
# Un premier algorithme : le graphe de jeu



# Un premier algorithme : le graphe de jeu



# Un premier algorithme : le graphe de jeu



# Le graphe de jeu : bilan

- Complet, fini, donne issue et stratégie

# Le graphe de jeu : bilan

- Complet, fini, donne issue et stratégie
- ... mais exponentiel en général !

# Le graphe de jeu : bilan

- Complet, fini, donne issue et stratégie
- ... mais exponentiel en général !

$\Rightarrow$ Méthodes plus fines pour étudier les jeux impartiaux :
théorie de Sprague-Grundy

# Retour aux origines

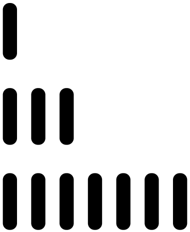
**Nim**

- Étudié en 1901 par Charles Bouton

# Retour aux origines

**Nim**

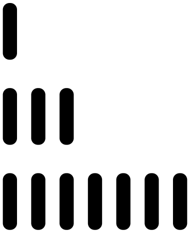
- Étudié en 1901 par Charles Bouton
- Se joue sur des piles de jetons



# Retour aux origines

**Nim**

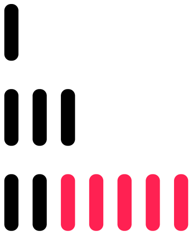
- Étudié en 1901 par Charles Bouton
- Se joue sur des piles de jetons
- Les joueurs retirent autant de jetons que voulu d'une seule pile



# Retour aux origines

**Nim**

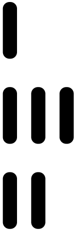
- Étudié en 1901 par Charles Bouton
- Se joue sur des piles de jetons
- Les joueurs retirent autant de jetons que voulu d'une seule pile



# Retour aux origines

**Nim**

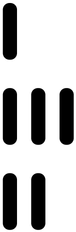
- Étudié en 1901 par Charles Bouton
- Se joue sur des piles de jetons
- Les joueurs retirent autant de jetons que voulu d'une seule pile



# Retour aux origines

**Nim**

- Étudié en 1901 par Charles Bouton
- Se joue sur des piles de jetons
- Les joueurs retirent autant de jetons que voulu d'une seule pile



$\Rightarrow$ Quelle est la stratégie gagnante ?

# Résoudre NIM

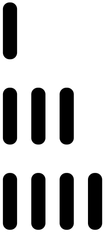
**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.

# Résoudre Nim

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de Nim avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



1

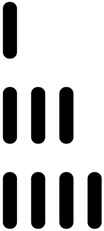
3

4

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$1 = 001$

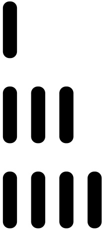
$3 = 011$

$4 = 100$

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.

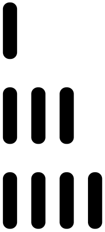


$$\begin{array}{r} 1 = 001 \\ \oplus \\ 3 = 011 \\ \oplus \\ 4 = 100 \\ \hline \end{array}$$

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.

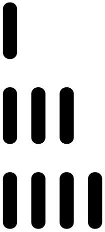


$$\begin{array}{r}
1 = 001 \\
\oplus \\
3 = 011 \\
\oplus \\
4 = 100 \\
\hline
110 = 6
\end{array}$$

# Résoudre Nim

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de Nim avec $n$ piles de $a_1, \dots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.



$$
\begin{array}{r}
1 = 001 \\
\oplus \\
3 = 011 \\
\oplus \\
4 = 100 \\
\hline
110 = 6
\end{array}
$$

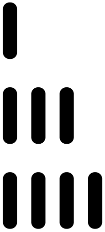
## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 001 \\
 & & \oplus \\
3 & = & 011 \\
 & & \oplus \\
4 & = & 100 \\
\hline
 & & 110
\end{array}
$$

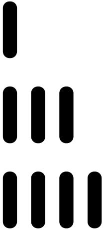
## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$$\begin{array}{r} 1 = 001 \\ \oplus \\ 3 = 011 \\ \oplus \\ 4 = 100 \\ \hline 110 \end{array}$$

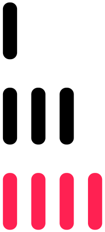
## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.

# Résoudre Nim

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de Nim avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 001 \\ & & \oplus \\ 3 & = & 011 \\ & & \oplus \\ 0 & = & 000 \\ \hline & & 010 \end{array}$$

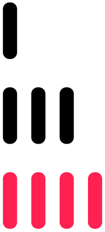
## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 001 \\ & & \oplus \\ 3 & = & 011 \\ & & \oplus \\ 0 & = & 000 \\ \hline & & 010 \end{array}$$

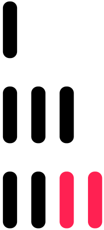
## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 001 \\ & & \oplus \\ 3 & = & 011 \\ & & \oplus \\ 2 & = & 010 \\ \hline & & 000 \end{array}$$

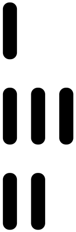
## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.

# Résoudre NIM

**Théorème** (Bouton, 1901)

Une position de NIM avec $n$ piles de $a_1, \ldots, a_n$ jetons est $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.



$$\begin{array}{r} 1 = 001 \\ \oplus \\ 3 = 011 \\ \oplus \\ 2 = 010 \\ \hline 000 \end{array}$$

## Preuve (par induction)

- Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors on peut annuler la nim-somme.
- Sinon, aucun coup ne peut garder la nim-somme nulle.

# Retour aux jeux : sommer

# Retour aux jeux : sommer

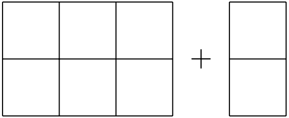
**Somme**

Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.

# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

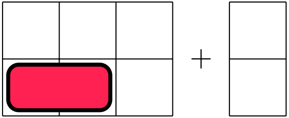
Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

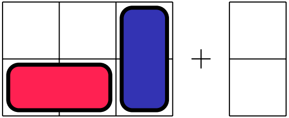
Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

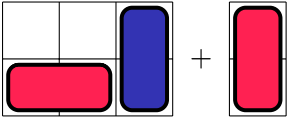
Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

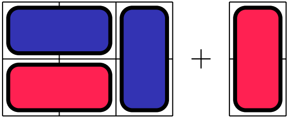
Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

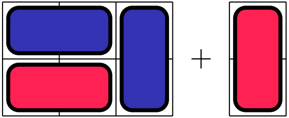
Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.

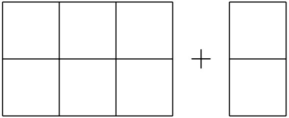


Pourquoi sommer des jeux ?

# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.

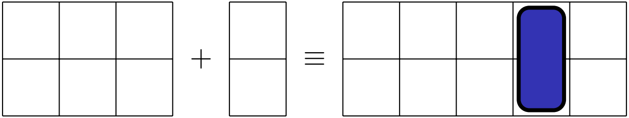


Pourquoi sommer des jeux ?

# Retour aux jeux : sommer

**Somme**

Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur $G$ soit sur $H$. Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Pourquoi sommer des jeux ?

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$G + H$

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$$\begin{tikzcd} & G' + H \\ G + H \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G + H' \end{tikzcd}$$

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$$\begin{tikzcd}
 & G' + H \arrow[r] & G'' + H \\
G + H \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & G + H' \arrow[r] & G + H''
\end{tikzcd}$$

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$$\begin{tikzcd}
 & G' + H \arrow[r] & G'' + H & \mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P} \\
G + H \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \text{(hyp. d'induction)} \\
 & G + H' \arrow[r] & G + H'' & \mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$$\begin{tikzcd} & G' + H \arrow[r] & G'' + H \\ G + H \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & G + H' \arrow[r] & G + H'' \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$
(hyp. d'induction)
$\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$

- Si $H$ est $\mathcal{N}$ :

$$G + H$$

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$$\begin{tikzcd}
 & G' + H \arrow[r] & G'' + H & \color{red}{\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}} \\
G + H \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \color{red}{\text{(hyp. d'induction)}} \\
 & G + H' \arrow[r] & G + H'' & \color{red}{\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}}
\end{tikzcd}$$

- Si $H$ est $\mathcal{N}$ :

$$\begin{tikzcd}
G + H \arrow[r] & G + H'
\end{tikzcd}$$

# Sommer un jeu $\mathcal{P}$

**Proposition**

Si $G$ est $\mathcal{P}$, alors $G + H$ a la même issue que $H$.

## Preuve par induction

- Si $H$ est $\mathcal{P}$ :

$$\begin{tikzcd} & G' + H \arrow[r] & G'' + H \\ G + H \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & G + H' \arrow[r] & G + H'' \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$
(hyp. d'induction)
$\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$

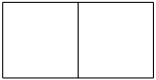
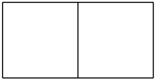
- Si $H$ est $\mathcal{N}$ :

$$\begin{tikzcd} G + H \arrow[r] & G + H' \end{tikzcd}$$

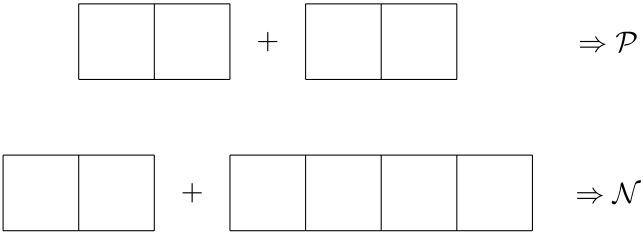
$\mathcal{P} + \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$

# Sommer des jeux $\mathcal{N}$

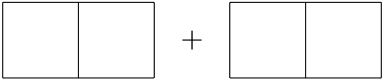
# Sommer des jeux $\mathcal{N}$

 $+$  $\Rightarrow \mathcal{P}$

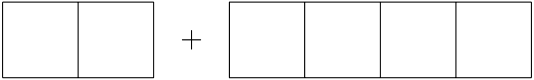
# Sommer des jeux $\mathcal{N}$



# Sommer des jeux $\mathcal{N}$



$\Rightarrow \mathcal{P}$



$\Rightarrow \mathcal{N}$

$\Rightarrow$ Définition de classes d'équivalence pour les jeux

# Valeurs de Grundy

**Équivalence de jeux**

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J,\ G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

# Valeurs de Grundy

**Équivalence de jeux**

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J$, $G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

**Théorème** (Sprague 1935, Grundy 1939)

Pour tout jeu $J$, il existe un entier $n$ tel que $J$ est équivalent à NIM sur une pile de $n$ jetons.

# Valeurs de Grundy

**Équivalence de jeux**

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J$, $G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

**Théorème** (Sprague 1935, Grundy 1939)

Pour tout jeu $J$, il existe un entier $n$ tel que $J$ est équivalent à NIM sur une pile de $n$ jetons.

**Valeur de Grundy**

On note $\mathcal{G}(J) := n$ du théorème de Sprague-Grundy.

# Valeurs de Grundy

**Équivalence de jeux**

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J,\ G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

**Théorème** (Sprague 1935, Grundy 1939)

Pour tout jeu $J$, il existe un entier $n$ tel que $J$ est équivalent à Nim sur une pile de $n$ jetons.

**Valeur de Grundy**

On note $\mathcal{G}(J) := n$ du théorème de Sprague-Grundy.

- $\mathcal{G}(J) = 0 \Leftrightarrow J$ est $\mathcal{P}$

# Valeurs de Grundy

**Équivalence de jeux**

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J$, $G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

**Théorème** (Sprague 1935, Grundy 1939)

Pour tout jeu $J$, il existe un entier $n$ tel que $J$ est équivalent à NIM sur une pile de $n$ jetons.

**Valeur de Grundy**

On note $\mathcal{G}(J) := n$ du théorème de Sprague-Grundy.

- $\mathcal{G}(J) = 0 \Leftrightarrow J$ est $\mathcal{P}$
- $\mathcal{G}(J) = \text{mex}\{\mathcal{G}(J') \mid J' \text{ option de } J\}$

# Propriétés des valeurs de Grundy

**Proposition**

$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H$ est $\mathcal{P}$

# Propriétés des valeurs de Grundy

**Proposition**

$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H$ est $\mathcal{P}$

**Corollaire de Sprague-Grundy**

$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$

# Propriétés des valeurs de Grundy

**Proposition**

$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H$ est $\mathcal{P}$

**Corollaire de Sprague-Grundy**

$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$

$\rightarrow$ Outils puissants pour étudier les jeux impartiaux

# Jeux taking-breaking

**Jeux taking-breaking**

Se jouent sur des piles de jetons.

# Jeux taking-breaking

**Jeux taking-breaking**

Se jouent sur des piles de jetons. Trois types de coups :

- Taking : enlever des jetons
- Breaking : diviser des piles
- Taking et Breaking en même temps

# Jeux taking-breaking

**Jeux taking-breaking**

Se jouent sur des piles de jetons. Trois types de coups :

- Taking : enlever des jetons
- Breaking : diviser des piles
- Taking et Breaking en même temps

## Exemples

- Nim (Bouton, 1901)
- Wythoff (Wythoff, 1907)
- Jeu de Grundy (Grundy, 1939)
- Cram sur une ligne
- ... et plus encore !

# Jeux taking-breaking

**Jeux taking-breaking**

Se jouent sur des piles de jetons. Trois types de coups :

- Taking : enlever des jetons
- Breaking : diviser des piles
- Taking et Breaking en même temps

## Exemples

- NIM (Bouton, 1901)
- WYTHOFF (Wythoff, 1907)
- Jeu de Grundy (Grundy, 1939)
- CRAM sur une ligne
- ... et plus encore !
- Jeux de soustraction, jeux octaux

# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.

# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

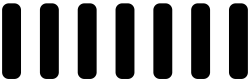
Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.
Enlever $k$ jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.
Enlever $k$ jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : SUB($\{2, 4\}$)



# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.
Enlever $k$ jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : SUB($\{2, 4\}$)

# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.
Enlever $k$ jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : SUB($\{2, 4\}$)

# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.
Enlever $k$ jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : SUB($\{2, 4\}$)

# Jeux de soustraction

**Jeu de soustraction** SUB($S$)

Jeu taking-breaking avec uniquement des coups de type taking.
Enlever $k$ jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : SUB($\{2, 4\}$)

# Étudier un jeu de soustraction

## Problèmes de décision (rappel)

- Le jeu est-il $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$ ?
- Quelle est la stratégie gagnante ?

$\rightarrow$ Généralement difficile (PSPACE pour beaucoup de jeux)...

# Étudier un jeu de soustraction

## Problèmes de décision (rappel)

- Le jeu est-il $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$ ?
- Quelle est la stratégie gagnante ?

$\rightarrow$ Généralement difficile (PSPACE pour beaucoup de jeux)...

## Remarque

Jouer sur plusieurs piles $\equiv$ Jouer sur la somme

$\Rightarrow$ Étudier le jeu sur une pile suffit !

# Étudier un jeu de soustraction

## Problèmes de décision (rappel)

- Le jeu est-il $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{P}$ ?
- Quelle est la stratégie gagnante ?

$\rightarrow$ Généralement difficile (PSPACE pour beaucoup de jeux)...

## Remarque

Jouer sur plusieurs piles $\equiv$ Jouer sur la somme

$\Rightarrow$ Étudier le jeu sur une pile suffit !

**Séquence de Grundy**

Liste des valeurs de Grundy pour des piles de taille 0, 1, 2, etc.

# Étudier un jeu de soustraction

**Théorème** (Folklore)

Si $S$ fini, alors la séquence de $\mathsf{SUB}(S)$ est ultimement périodique.

# Étudier un jeu de soustraction

**Théorème** (Folklore)

Si $S$ fini, alors la séquence de $\mathrm{SUB}(S)$ est ultimement périodique.

**Théorème** (Albert, Nowakowski, Wolfe, 2007)

Si $S$ fini, alors la séquence de $\mathrm{SUB}(\mathbb{N} \setminus S)$ est ultimement arithmétique périodique.

# Étudier un jeu de soustraction

**Théorème** (Folklore)

Si $S$ fini, alors la séquence de $\mathrm{SUB}(S)$ est ultimement périodique.

**Théorème** (Albert, Nowakowski, Wolfe, 2007)

Si $S$ fini, alors la séquence de $\mathrm{SUB}(\mathbb{N} \setminus S)$ est ultimement arithmétique périodique.

## Problèmes ouverts

- Périodicité de $\mathrm{SUB}(S)$ pour $S$ quelconque ?
- Un jeu est-il périodique ou ultimement périodique ?

# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$

# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$

# Jeux octaux

## Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$

# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

# Jeux octaux

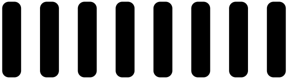
**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**

# Jeux octaux

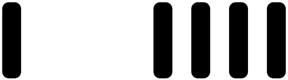
**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



# Jeux octaux

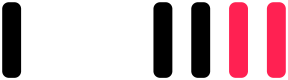
**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**

# Jeux octaux

**Jeu octal**

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un code octal.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Retirer $i$ jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

## Des exemples connus

- Nim est $\mathbf{0.33333}\ldots$
- Les jeux de soustraction : $d_i \in \{0, 3\}$
- Cram sur une ligne est $\mathbf{0.07}$

# Étudier les jeux octaux

Comme pour les jeux de soustraction : la séquence de Grundy.
$\rightarrow$ Utilisation d'un algorithme de détection de période

# Étudier les jeux octaux

Comme pour les jeux de soustraction : la séquence de Grundy.
→ Utilisation d'un algorithme de détection de période

Problème : c'est beaucoup plus compliqué !

- Séquence de Grundy de **0.7** : période 2
- Séquence de Grundy de **0.07** : prépériode 68, période 34
- Séquence de Grundy de **0.007** : $2^{28}$ valeurs calculées, pas de régularité détectée !

# Étudier les jeux octaux

Comme pour les jeux de soustraction : la séquence de Grundy.
→ Utilisation d'un algorithme de détection de période

Problème : c'est beaucoup plus compliqué !

- Séquence de Grundy de **0.7** : période 2
- Séquence de Grundy de **0.07** : prépériode 68, période 34
- Séquence de Grundy de **0.007** : $2^{28}$ valeurs calculées, pas de régularité détectée !

**Conjecture** (Guy 1982)

Un jeu octal fini a une séquence de Grundy ultimement périodique.

# Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

# Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

1. Diviser une pile en plus de sous-piles $\rightarrow$ Jeux hexadécimaux

# Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

1. Diviser une pile en plus de sous-piles $\rightarrow$ Jeux hexadécimaux
2. Travailler sur d'autres structures que les piles de jetons

# Généraliser les jeux octaux

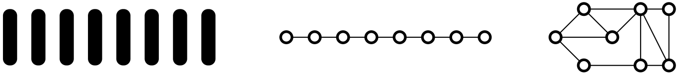
Deux façons :

1. Diviser une pile en plus de sous-piles $\rightarrow$ Jeux hexadécimaux
2. Travailler sur d'autres structures que les piles de jetons

$\Rightarrow$ Jouer à des jeux octaux... sur des graphes ! (enfin !)

# Des piles de jetons aux graphes

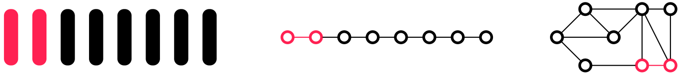
## Observation



Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

# Des piles de jetons aux graphes

## Observation

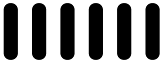


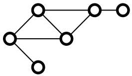
Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

- Retirer des jetons $\to$ Supprimer un sous-graphe connexe

# Des piles de jetons aux graphes

## Observation



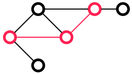


Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe

# Des piles de jetons aux graphes

## Observation

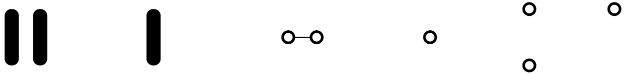


Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

# Des piles de jetons aux graphes

## Observation

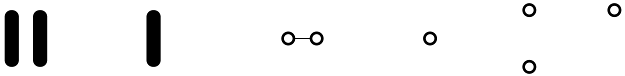


Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

# Des piles de jetons aux graphes

## Observation



Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

**Jeu octal sur des graphes** (BCDGMPS 2018)

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3}\ldots$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$ :

- Supprimer un sous-graphe connexe d'ordre $i \Leftrightarrow d_i \neq 0$
- Vider le graphe $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- Laisser un graphe non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- Déconnecter le graphe $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

# Jeux de suppression de sommets

## ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents $\Rightarrow$ $\mathbf{0.07}$

# Jeux de suppression de sommets

## ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents $\Rightarrow$ **0.07**

CRAM est **0.07** sur les grilles

# Jeux de suppression de sommets

## Arc-Kayles (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents $\Rightarrow$ **0.07**

Cram est **0.07** sur les grilles

Complexité ouverte

# Jeux de suppression de sommets

## Arc-Kayles (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents $\Rightarrow$ **0.07**

Cram est **0.07** sur les grilles

Complexité ouverte

## Grim (Adams *et al.*, 2015)

Supprimer un sommet non-isolé $\Rightarrow$ **0.6**

# Jeux de suppression de sommets

ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents ⇒ **0.07**

CRAM est **0.07** sur les grilles

Complexité ouverte

GRIM (Adams *et al.*, 2015)

Supprimer un sommet non-isolé ⇒ **0.6**

NODE-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer un sommet et tous ses voisins ⇒ Pas un jeu octal

# Jeux de suppression de sommets

### Arc-Kayles (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents ⇒ **0.07**
Cram est **0.07** sur les grilles

Complexité ouverte

### Grim (Adams *et al.*, 2015)

Supprimer un sommet non-isolé ⇒ **0.6**

### Node-Kayles (Schaefer, 1978)

Supprimer un sommet et tous ses voisins ⇒ Pas un jeu octal

PSPACE-complet (Schaefer, 1978), mais algorithmes polynomiaux pour des familles comme les étoiles subdivisées (Fleischer et Trippen, 2004)

# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$ ?

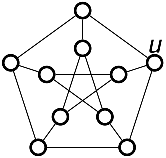
# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$ ?

## Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$



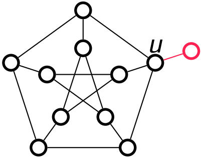

$(k = 0)$

# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$ ?

### Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

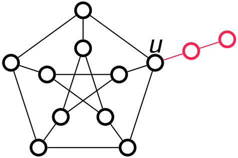
$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$  $(k = 1)$

# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux → séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes → ?

## Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$  $(k = 2)$

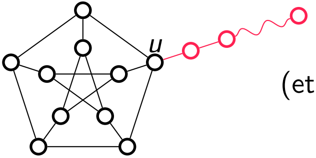
# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$ ?

### Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$$




(etc)

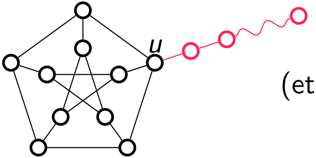
# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$ ?

### Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$




(etc)

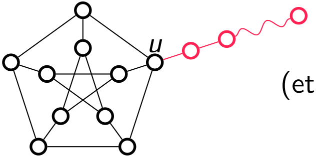
$\rightarrow$ Approche déjà utilisée pour Node-Kayles (Fleischer et Trippen, 2004) et Arc-Kayles (Huggan et Stevens, 2016)

# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$ ?

### Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} {\color{red}P_k} =$ 

(etc)

$\rightarrow$ Approche déjà utilisée pour Node-Kayles (Fleischer et Trippen, 2004) et Arc-Kayles (Huggan et Stevens, 2016)

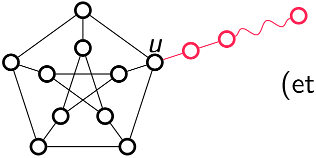
Difficile pour les jeux octaux !

# Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux → séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes → ?

### Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$  (etc)



→ Approche déjà utilisée pour Node-Kayles (Fleischer et Trippen, 2004) et Arc-Kayles (Huggan et Stevens, 2016)

Difficile pour les jeux octaux ! ⇒ Nous étudions les jeux de soustraction connexes CSG($S$)

# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

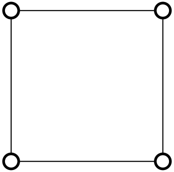
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis NODE-KAYLES

$M = max(S)$, ici $M = 4$



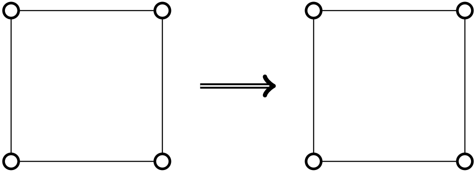
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis Node-Kayles

$M = max(S)$, ici $M = 4$



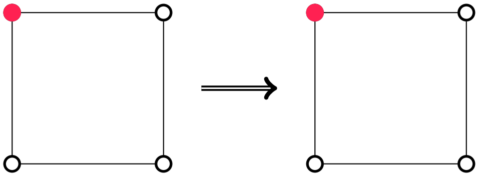
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis Node-Kayles

$M = max(S)$, ici $M = 4$



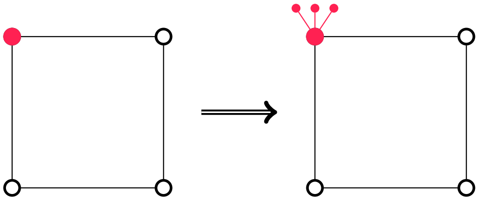
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis Node-Kayles

$M = max(S)$, ici $M = 4$



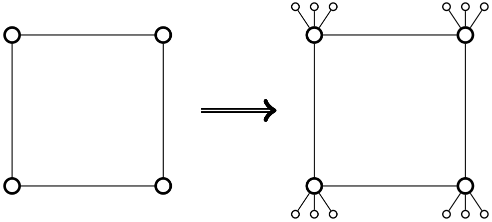
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis Node-Kayles

$M = max(S)$, ici $M = 4$



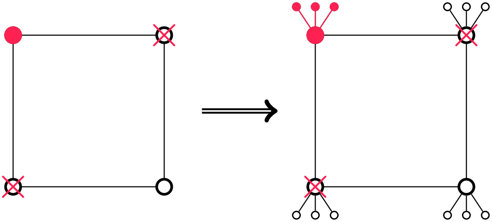
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

## Réduction depuis Node-Kayles

$M = max(S)$, ici $M = 4$



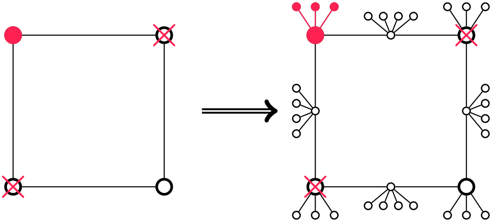
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis Node-Kayles

$M = max(S)$, ici $M = 4$



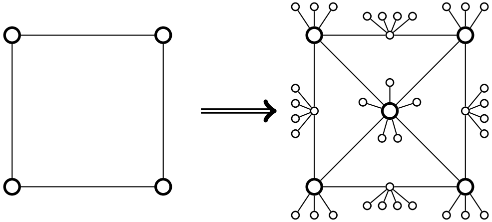
# Complexité des jeux de soustraction

**Théorème** (Burke et D., 2020+)

Si $S$ est fini et $1 \notin S$, alors CSG($S$) est PSPACE-complet.

Réduction depuis NODE-KAYLES

$M = max(S)$, ici $M = 4$



# Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

**Théorème** (D., Moncel, Parreau, 2019)

Si $S$ est fini, alors pour tout graphe $G$ et sommet $u$ la séquence des $\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k)$ pour CSG($S$) est ultimement périodique.

# Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

**Théorème** (D., Moncel, Parreau, 2019)

Si $S$ est fini, alors pour tout graphe $G$ et sommet $u$ la séquence des $\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k)$ pour CSG($S$) est ultimement périodique.

## Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$ : cas des chemins

# Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

**Théorème** (D., Moncel, Parreau, 2019)

Si $S$ est fini, alors pour tout graphe $G$ et sommet $u$ la séquence des $\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k)$ pour CSG($S$) est ultimement périodique.

## Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$ : cas des chemins
2. Sinon, trois types de coups possibles :
   - 2.1 Jouer sur $P_k \rightarrow |S|$ coups différents
   - 2.2 Jouer sur $G$ sans supprimer $u \rightarrow$ au plus $2^{|G|-1}$ coups différents
   - 2.3 Vider $G \rightarrow$ au plus $|S|$ coups différents

# Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

**Théorème** (D., Moncel, Parreau, 2019)

Si $S$ est fini, alors pour tout graphe $G$ et sommet $u$ la séquence des $\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k)$ pour CSG($S$) est ultimement périodique.

## Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$ : cas des chemins
2. Sinon, trois types de coups possibles :
   2.1 Jouer sur $P_k \rightarrow |S|$ coups différents
   2.2 Jouer sur $G$ sans supprimer $u \rightarrow$ au plus $2^{|G|-1}$ coups différents
   2.3 Vider $G \rightarrow$ au plus $|S|$ coups différents

   $\Rightarrow \mathcal{G}(G) \leq C$

# Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

**Théorème** (D., Moncel, Parreau, 2019)

Si $S$ est fini, alors pour tout graphe $G$ et sommet $u$ la séquence des $\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k)$ pour CSG($S$) est ultimement périodique.

## Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$ : cas des chemins
2. Sinon, trois types de coups possibles :
   2.1 Jouer sur $P_k \to |S|$ coups différents
   2.2 Jouer sur $G$ sans supprimer $u \to$ au plus $2^{|G|-1}$ coups différents
   2.3 Vider $G \to$ au plus $|S|$ coups différents

   $\Rightarrow \mathcal{G}(G) \leq C$
   Chaque coup emmène vers une séquence périodique, par calcul du mex on a le résultat.

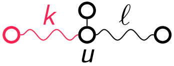
# Résultats de régularité

| Jeu | Graphe et sommet $u$ | Régularité | Référence |
|---|---|---|---|

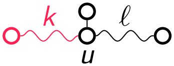
# Résultats de régularité

| Jeu | Graphe et sommet $u$ | Régularité | Référence |
|---|---|---|---|
| Tout CSG ($S$ fini) | Tout graphe $G$, tout sommet $u$ | Ultime périodicité | D., Moncel, Parreau (2019) |

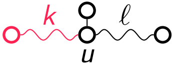
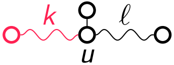
# Résultats de régularité

| Jeu | Graphe et sommet $u$ | Régularité | Référence |
|---|---|---|---|
| Tout CSG<br>($S$ fini) | Tout graphe $G$, tout sommet $u$ | Ultime périodicité | D., Moncel, Parreau (2019) |
| Arc-Kayles<br>**0.07** |  | | Huggan et Stevens, 2016 |

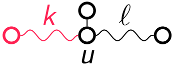
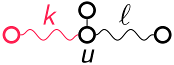
# Résultats de régularité

| Jeu | Graphe et sommet $u$ | Régularité | Référence |
|---|---|---|---|
| Tout CSG<br>($S$ fini) | Tout graphe $G$, tout sommet $u$ | Ultime<br>périodicité | D., Moncel,<br>Parreau (2019) |
| ARC-KAYLES<br>**0.07** |  | Ultime<br>périodicité<br>conjecturée | Huggan et<br>Stevens, 2016 |

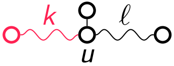
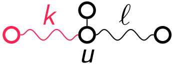
# Résultats de régularité

<table>
<tr><th>Jeu</th><th>Graphe et sommet $u$</th><th>Régularité</th><th>Référence</th></tr>
<tr><td>Tout CSG<br>($S$ fini)</td><td>Tout graphe $G$, tout sommet $u$</td><td>Ultime<br>périodicité</td><td>D., Moncel,<br>Parreau (2019)</td></tr>
<tr><td>Arc-Kayles<br>0.07</td><td></td><td>Ultime<br>périodicité<br>conjecturée</td><td>Huggan et<br>Stevens, 2016</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$CSG(S)$,<br>$S = \{1, ..., N\}$<br>$\mathbf{0.3^N}$</td><td>Étoile $K_{1,n}$, $u$ sommet central</td><td>Période $N+1$</td><td rowspan="2">D., Moncel,<br>Parreau (2019)</td></tr>
<tr><td></td><td>Période $N+1$<br>Prépériode<br>$0$ ou $N+1$</td></tr>
</table>

# Résultats de régularité

| Jeu | Graphe et sommet $u$ | Régularité | Référence |
|---|---|---|---|
| Tout CSG<br>($S$ fini) | Tout graphe $G$, tout sommet $u$ | Ultime périodicité | D., Moncel, Parreau (2019) |
| Arc-Kayles<br>**0.07** |  | Ultime périodicité conjecturée | Huggan et Stevens, 2016 |
| $CSG(S)$,<br>$S = \{1, ..., N\}$<br>**0.3^N** | Étoile $K_{1,n}$, $u$ sommet central | Période $N+1$ | D., Moncel, Parreau (2019) |
| |  | Période $N+1$<br>Prépériode<br>$0$ ou $N+1$ | |
| CSG($\{1,2,3\}$)<br>**0.333** | Toute étoile subdivisée, $u$ sommet central ou feuille | Période<br>$N+1=4$ | D., Moncel, Parreau (2019) |
| CSG($\{1,2\}$)<br>**0.33** | | Période<br>$N+1=3$ | BCDGMPS (2018) |

# Résultats de régularité

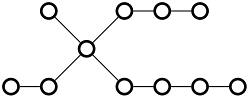
| Jeu | Graphe et sommet $u$ | Régularité | Référence |
|---|---|---|---|
| Tout CSG<br>($S$ fini) | Tout graphe $G$, tout sommet $u$ | Ultime périodicité | D., Moncel,<br>Parreau (2019) |
| ARC-KAYLES<br>**0.07** |  | Ultime<br>périodicité<br>conjecturée | Huggan et<br>Stevens, 2016 |
| $CSG(S)$,<br>$S = \{1, ..., N\}$<br>$\mathbf{0.3^N}$ | Étoile $K_{1,n}$, $u$ sommet central | Période $N + 1$ | D., Moncel,<br>Parreau (2019) |
| |  | Période $N + 1$<br>Prépériode<br>0 ou $N + 1$ | |
| CSG($\{1, 2, 3\}$)<br>**0.333** | Toute étoile subdivisée, $u$<br>sommet central ou feuille | Période<br>$N + 1 = 4$ | D., Moncel,<br>Parreau (2019) |
| CSG($S$)<br>$S = \{1, 2\}$ | | Période<br>$N + 1 = 3$ | Beaudou,<br>Coupechoux<br>D., Gravier,<br>Moncel, Parreau,<br>Sopena (2018) |
| | Toute biétoile subdivisée, $u$<br>sommet central ou feuille | | |

# CSG($\{1, 2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

# CSG($\{1,2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

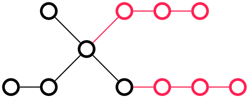
Dans CSG($\{1,2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



# CSG($\{1, 2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

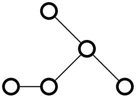
Dans CSG($\{1, 2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



# CSG($\{1, 2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

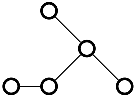
Dans CSG($\{1, 2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



# CSG($\{1,2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

Dans CSG($\{1,2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



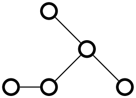
Nombre de branches de longueur 2

| Nombre de branches | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $2p$ | $2p+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 2 | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | |
| $2p$ | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 3 | $(03)^*$ | 0 | |
| $2p+1$ | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | $(12)^*$ | 1 | 2 |

# CSG($\{1, 2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

Dans CSG($\{1, 2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



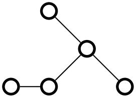
Nombre de branches de longueur 2

| Nombre de branches | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $2p$ | $2p+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 2 | | | | | | |
| 3 | 1 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | |
| $2p$ | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 3 | $(03)^*$ | 0 | |
| $2p+1$ | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | $(12)^*$ | 1 | 2 |

# CSG($\{1,2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

Dans CSG($\{1,2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



Nombre de branches de longueur 2

| Nombre de branches | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $2p$ | $2p+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 2 | | | | | | |
| 3 | 1 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | |
| $2p$ | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 3 | $(03)^*$ | 0 | |
| $2p+1$ | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | $(12)^*$ | 1 | 2 |

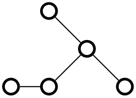
**Théorème** (BCDGMPS18)

Il existe un algorithme polynomial pour calculer la valeur de Grundy d'une étoile subdivisée dans CSG($\{1,2\}$).

# CSG($\{1,2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

Dans CSG($\{1,2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



Nombre de branches de longueur 2 (colonnes) / Nombre de branches (lignes)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $2p$ | $2p+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 2 | | | | | | |
| 3 | 1 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | |
| $2p$ | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 3 | $(03)^*$ | 0 | |
| $2p+1$ | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | $(12)^*$ | 1 | 2 |

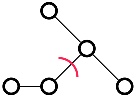
**Théorème** (BCDGMPS18)

Il existe un algorithme polynomial pour calculer la valeur de Grundy d'une étoile subdivisée dans CSG($\{1,2\}$).

# CSG($\{1,2\}$) sur les étoiles subdivisées : algo polynomial

**Lemme** (BCDGMPS18)

Dans CSG($\{1,2\}$), on peut réduire les branches d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3.



Nombre de branches de longueur 2

| Nombre de branches | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $2p$ | $2p+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 2 | | | | | | |
| 3 | 1 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | |
| $2p$ | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 3 | $(03)^*$ | 0 | |
| $2p+1$ | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | $(12)^*$ | 1 | 2 |

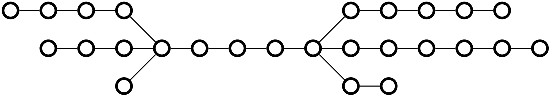
**Théorème** (BCDGMPS18)

Il existe un algorithme polynomial pour calculer la valeur de Grundy d'une étoile subdivisée dans CSG($\{1,2\}$).

# CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

## Réduction des chemins dans les biétoiles

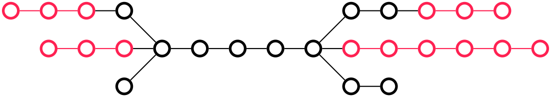
Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.



# CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

### Réduction des chemins dans les biétoiles

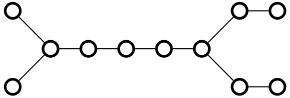
Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.



# CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

### Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

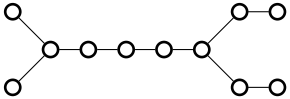


# CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

### Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.

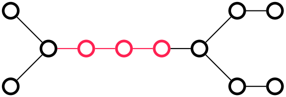


# CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

### Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.

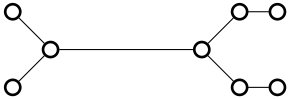


# CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.

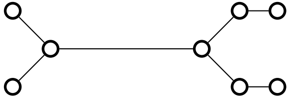


# CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

## Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



## Réduction de chemins pour CSG($\{1, 2\}$)

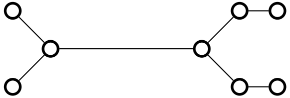
Chemins

# CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

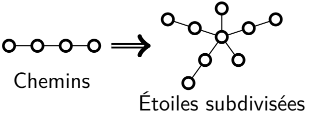
## Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



## Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)

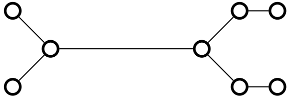


# CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

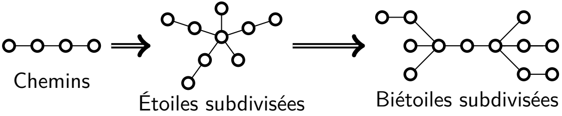
## Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



## Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)

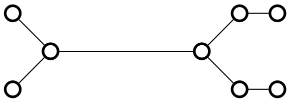


# CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

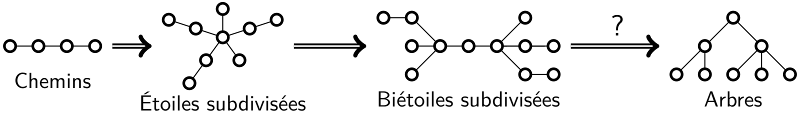
## Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



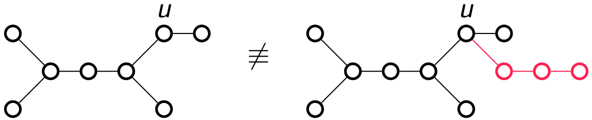
## Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)



# CSG($\{1, 2\}$) sur les arbres ?

### Proposition

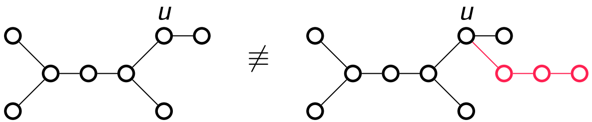
La réduction des chemins n'est pas valable pour les arbres :



# CSG($\{1, 2\}$) sur les arbres ?

## Proposition

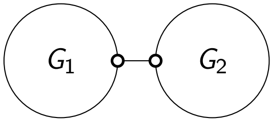
La réduction des chemins n'est pas valable pour les arbres :



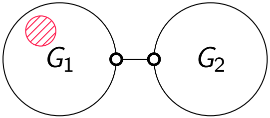

## Question ouverte

Quelle période pour les arbres ?

# Jeux de soustraction connexes et isthmes

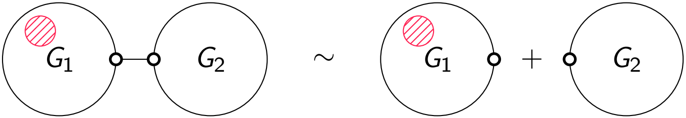


# Jeux de soustraction connexes et isthmes




Jouer sur le graphe

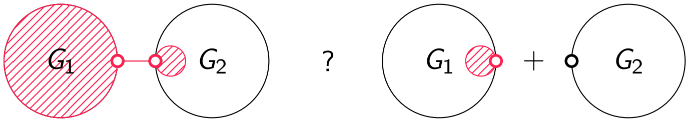
# Jeux de soustraction connexes et isthmes




Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

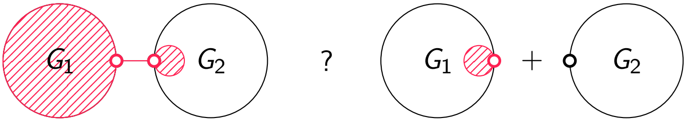
# Jeux de soustraction connexes et isthmes




Jouer sur le graphe Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

# Jeux de soustraction connexes et isthmes

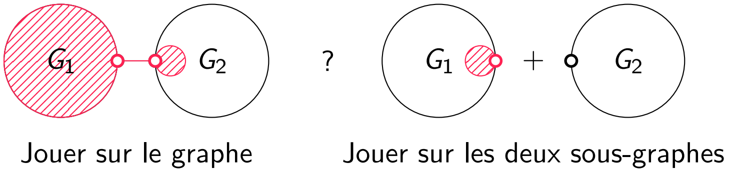



Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

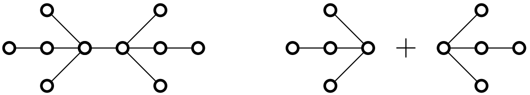
# Jeux de soustraction connexes et isthmes



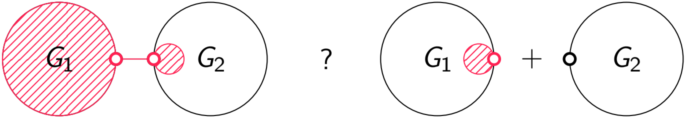

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

## Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



# Jeux de soustraction connexes et isthmes

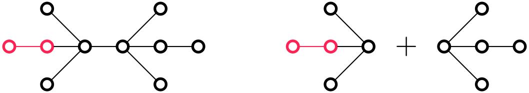



Jouer sur le graphe Jouer sur les deux sous-graphes

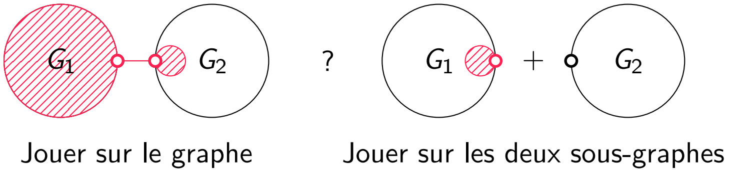
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

## Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



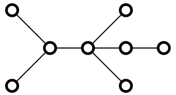
# Jeux de soustraction connexes et isthmes



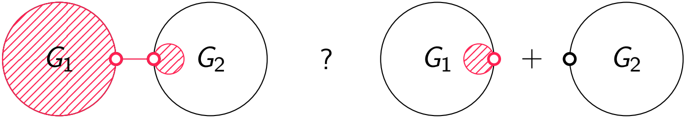

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

## Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



# Jeux de soustraction connexes et isthmes




Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

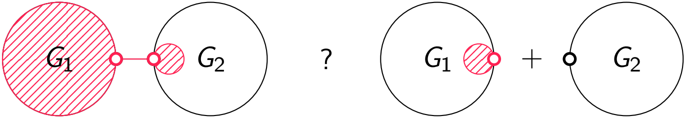
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

## Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées


$\Rightarrow$ L'isthme est atteignable à la toute fin

# Jeux de soustraction connexes et isthmes




Jouer sur le graphe    Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

## Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées


$\Rightarrow$ L'isthme est atteignable à la toute fin

$\Rightarrow$ Deux pseudo-sommes et raffinements des valeurs de Grundy

# Les valeurs de Grundy des biétoiles pour CSG($\{1, 2\}$)

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 1 :

# Les valeurs de Grundy des biétoiles pour CSG($\{1, 2\}$)

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 1 :

| | 0 | 1 | $1^*$ | 2 | $2^*$ | $2^\square$ | 3 | $3^\square$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |
| 1 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |
| $1^*$ | $\oplus$ | $\oplus$ | 2 | $\oplus$ | 0 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |
| 2 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |
| $2^*$ | $\oplus$ | $\oplus$ | 0 | $\oplus$ | 1 | 1 | $\oplus$ | 0 |
| $2^\square$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | 1 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |
| 3 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |
| $3^\square$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ | 0 | $\oplus$ | $\oplus$ | $\oplus$ |

où $\oplus$ est la nim-somme.

# Les valeurs de Grundy des biétoiles pour CSG($\{1, 2\}$)

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 2 :

| | $0$ | $0^*$ | $1$ | $1^*$ | $1^\square$ | $2$ | $2^*$ | $2^\square$ | $3$ | $3^\square$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 2 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 0 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ |
| $0^*$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 2 | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 0 | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ |
| $1$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 3 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 1 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ |
| $1^*$ | 2 | 2 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $1^\square$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 3 | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 1 | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ |
| $2$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 0 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 2 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ |
| $2^*$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| $2^\square$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 1 | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 2 | 0 | $\oplus_1$ | 1 |
| $3$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 1 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | 3 | $\oplus_1$ | $\oplus$ | $\oplus_1$ |
| $3^\square$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 0 | $\oplus_1$ | $\oplus_1$ | 3 | 1 | $\oplus_1$ | 0 |

où $\oplus$ est la nim-somme et $x \oplus_1 y$ signifie $x \oplus y \oplus 1$.

# Le mot de la fin

## Conclusion

- Généralisation des jeux octaux aux graphes
- Complexité des jeux CSG($S$) avec $S$ fini et $1 \notin S$
- Résultats de régularité pour les jeux de soustraction
- Pseudo-somme pour CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles

# Le mot de la fin

## Conclusion

- Généralisation des jeux octaux aux graphes
- Complexité des jeux CSG($S$) avec $S$ fini et $1 \notin S$
- Résultats de régularité pour les jeux de soustraction
- Pseudo-somme pour CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles

## Perspectives

- CSG : même période que les jeux de soustraction classiques ?
- Explorer d'autres familles de jeux octaux sur des graphes
- Complexité de CSG($S$) avec $S$ fini et $1 \in S$

# Le mot de la fin

## Conclusion

- Généralisation des jeux octaux aux graphes
- Complexité des jeux CSG($S$) avec $S$ fini et $1 \notin S$
- Résultats de régularité pour les jeux de soustraction
- Pseudo-somme pour CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles

## Perspectives

- CSG : même période que les jeux de soustraction classiques ?
- Explorer d'autres familles de jeux octaux sur des graphes
- Complexité de CSG($S$) avec $S$ fini et $1 \in S$