Criticalité, identification et jeux de suppression de sommets dans les graphes

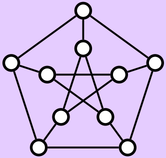
Soutenance de thèse d'Antoine Dailly

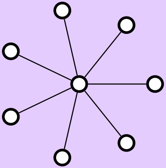
Sous la direction de Éric Duchêne, Hamamache Kheddouci et Aline Parreau.

27 septembre 2018

Cadre de la thèse

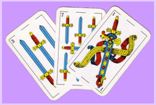
Graphes



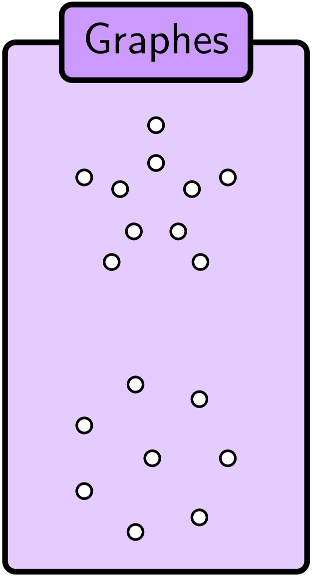


Jeux

MONOPOLY



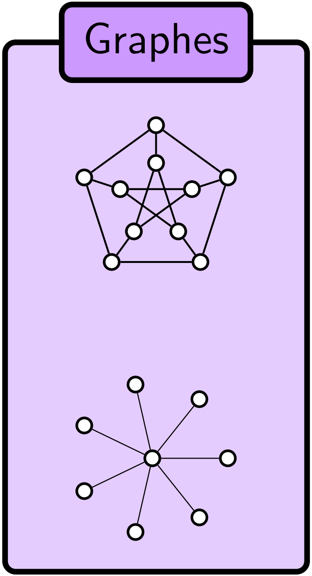
Graphes



Graphe $G(V, E)$:

- Sommets V

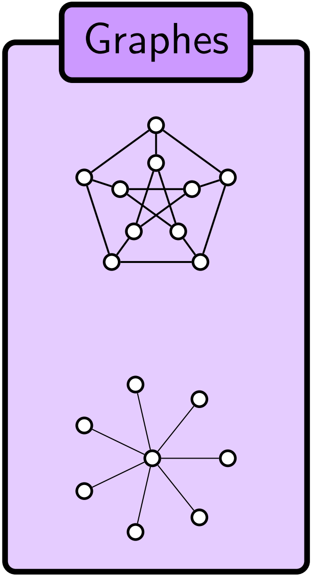
Graphes



Graphe $G(V, E)$:

- Sommets V
- Arêtes E

Graphes



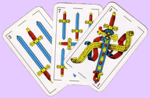
Graphe $G(V, E)$:

- Sommets V
- Arêtes E

Modèle puissant (réseaux, automates...) et objet mathématique.

Jeux

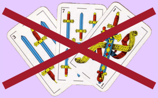
Jeux



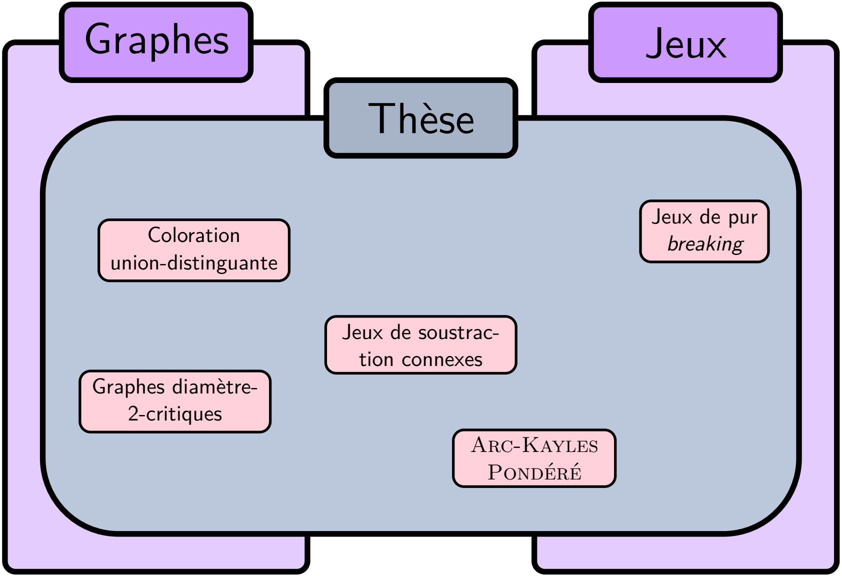
Jeux

- Deux joueurs ;
- Information parfaite ;
- Pas de hasard.

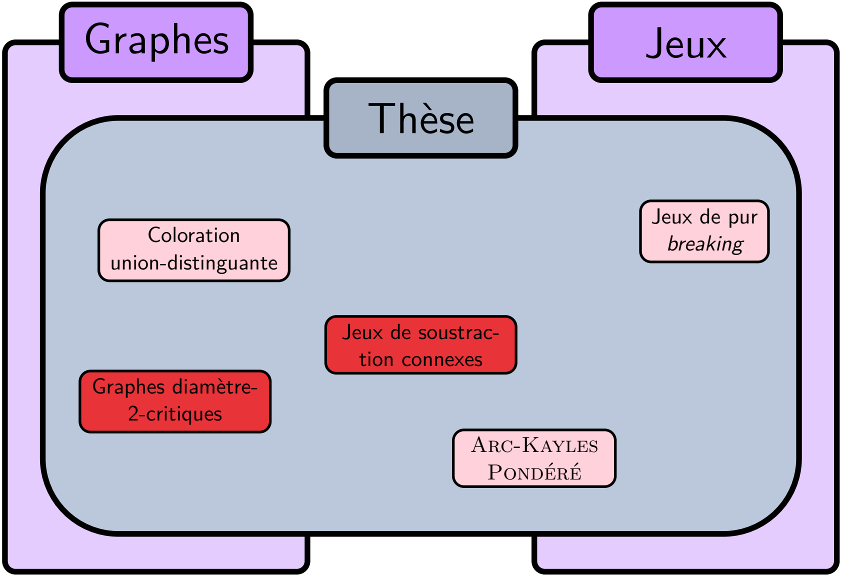
Jeux



Cadre de la thèse



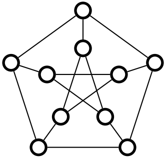
Cadre de la thèse



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

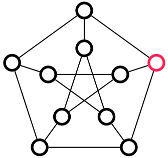
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

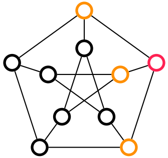
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

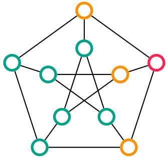
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

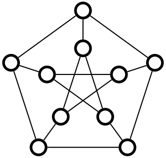
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

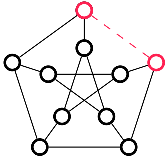
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2 et si supprimer toute arête augmente son diamètre.



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

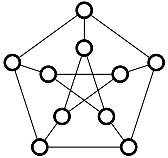
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2 et si supprimer toute arête augmente son diamètre.

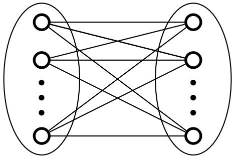


Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

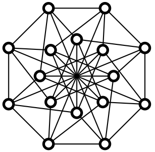
Définition

Un graphe est D2C s'il a diamètre 2 et si supprimer toute arête augmente son diamètre.

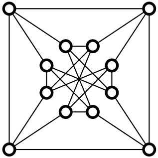




Graphes bipartis complets



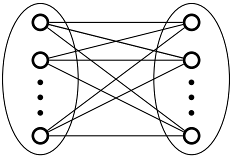
Graphe de Clebsch



Graphe de Chvàtal

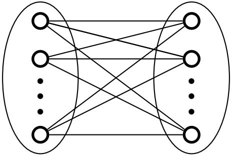
Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

Exemple : $K_{k,\ell}$



Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

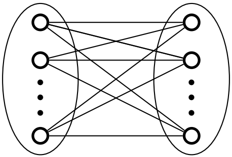
Exemple : $K_{k,\ell}$



$\Rightarrow$ $k\ell$ arêtes

Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

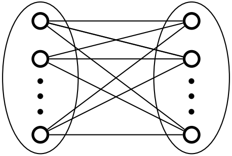
Exemple : $K_{k,\ell}$



$\Rightarrow k\ell$ arêtes $\Rightarrow$ max $\sim \frac{n^2}{4}$

Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

Exemple : $K_{k,\ell}$



$\Rightarrow k\ell$ arêtes $\Rightarrow \max \sim \frac{n^2}{4}$

Exemple : graphes D2C sans triangles

Au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes ; égalité $\Leftrightarrow G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ (Mantel, 1907).

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)
- $n \geq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\}\text{taille } 10^{14}$ (Füredi, 1992)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)
- $n \geq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\}_{\text{taille } 10^{14}}$ (Füredi, 1992)
- $\Delta \geq 0.6756n$ (Jabalameli *et al.*, 2016)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

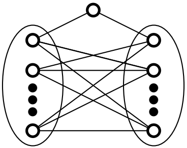
- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)
- $n \geq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\}\text{taille } 10^{14}$ (Füredi, 1992)
- $\Delta \geq 0.6756n$ (Jabalameli *et al.*, 2016)
- Avec une arête dominante (Hanson et Wang, 2003, Haynes *et al.*, 2011, Wang 2012)

Renforcer la conjecture ?

Renforcer la conjecture ?

Affirmation (Füredi, 1992)

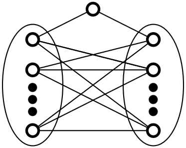
Si G est D2C non-biparti, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \approx \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor$, avec égalité ssi G est obtenu en subdivisant une arête de $K_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$.

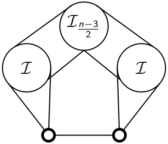


Renforcer la conjecture ?

Affirmation (Füredi, 1992)

Si G est D2C non-biparti, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \approx \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor$, avec égalité ssi G est obtenu en subdivisant une arête de $K_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$.





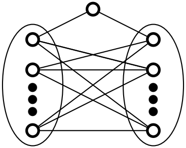
Théorème (Balbuena *et al.*, 2015)

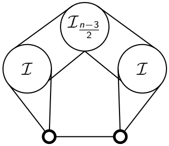
Si G est D2C non-biparti sans triangles, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes, avec égalité ssi G est une inflation de C_5.

Renforcer la conjecture ?

Affirmation (Füredi, 1992)

Si G est D2C non-biparti, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \approx \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor$, ~~avec égalité ssi G est obtenu en subdivisant une arête de $K_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$.~~





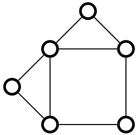
Théorème (Balbuena *et al.*, 2015)

Si G est D2C non-biparti sans triangles, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes, avec égalité ssi G est une inflation de C_5.

Renforcer la conjecture

Conjecture : renforcement linéaire (Balbuena *et al.*, 2015)

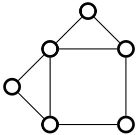
Si G est D2C non-biparti et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes. Si $n \geq 10$, il y a égalité ssi G est une inflation de C_5.

$H_5 =$ 

Renforcer la conjecture

Conjecture : renforcement linéaire (Balbuena *et al.*, 2015)

Si G est D2C non-biparti et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes. Si $n \geq 10$, il y a égalité ssi G est une inflation de C_5.

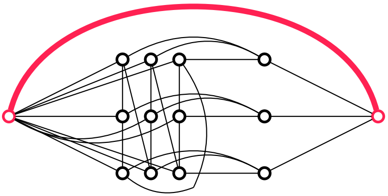
$H_5 =$ 

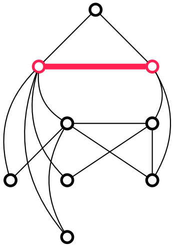
$\rightarrow$ Difficile ! Renforcement constant ?

Notre résultat principal

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.





Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

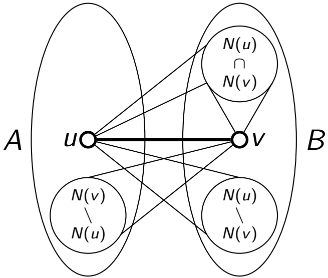
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.



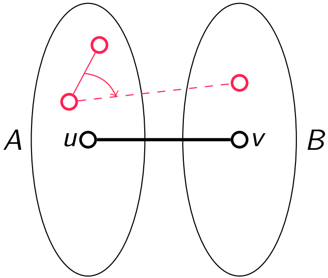
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.



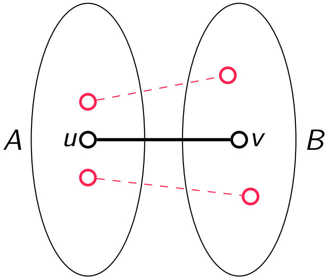
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.
3. Trouver deux non-arêtes sans antécédent entre A et B.



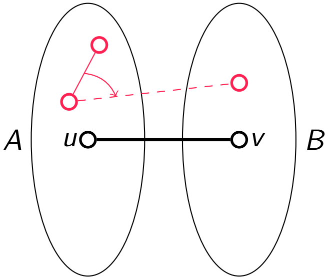
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.
3. Trouver deux non-arêtes sans antécédent entre A et B.



Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

Définition

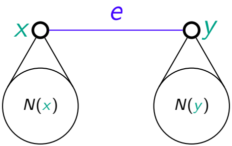
Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

$\rightarrow$ Soit $e = xy$ et $N(x) \cap N(y) = \emptyset$;

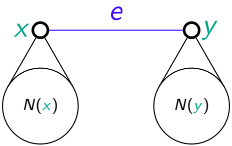


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

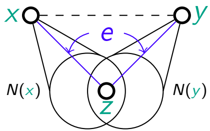
Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

$\rightarrow$ Soit $e = xy$ et $N(x) \cap N(y) = \emptyset$;



$\rightarrow$ Soit $xy \notin E$, $N(x) \cap N(y) = \{z\}$ et $e \in \{xz, yz\}$.

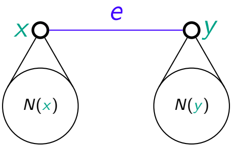


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

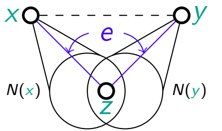
Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

$\rightarrow$ Soit $e = xy$ et $N(x) \cap N(y) = \emptyset$;



$\rightarrow$ Soit $xy \notin E$, $N(x) \cap N(y) = \{z\}$ et $e \in \{xz, yz\}$.

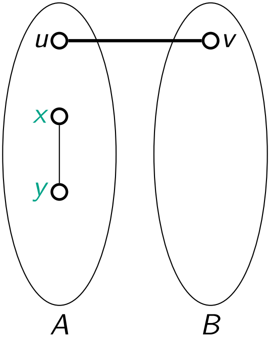


$\Rightarrow$ Toute arête est critique pour une paire de sommets

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

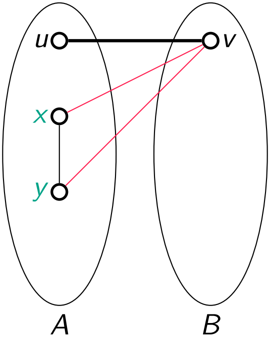


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.

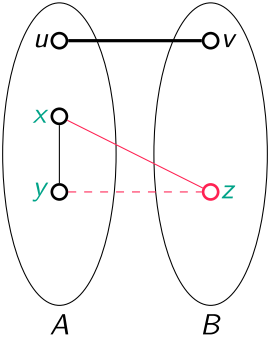


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$

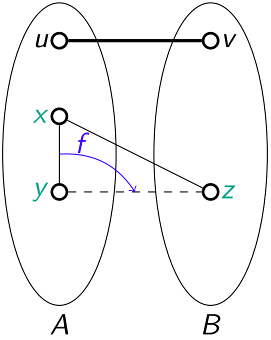


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$: soit $f(xy) = \overline{yz}$.

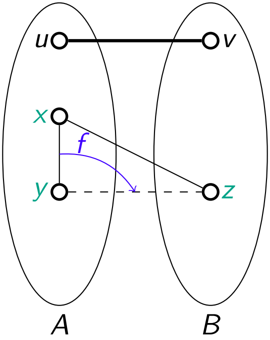


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$: soit $f(xy) = \overline{yz}$.



Lemme

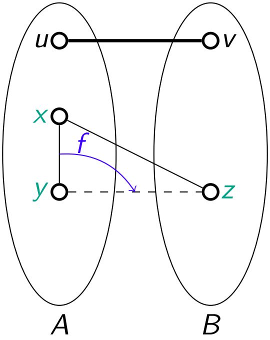
f est injective.

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$: soit $f(xy) = \overline{yz}$.



Lemme

f est injective. $\Rightarrow$ Borne de Murty-Simon démontrée

Des non-arêtes sans antécédent ?

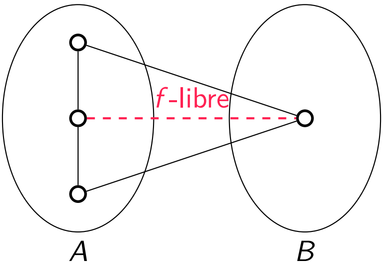
Définition

Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.

Des non-arêtes sans antécédent ?

Définition

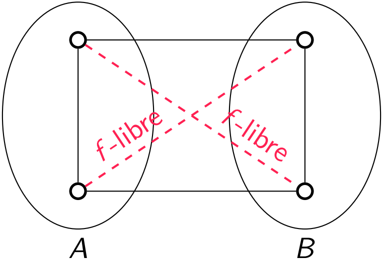
Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.



Des non-arêtes sans antécédent ?

Définition

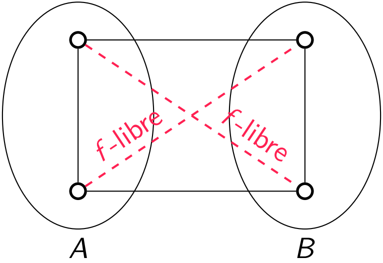
Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.



Des non-arêtes sans antécédent ?

Définition

Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.



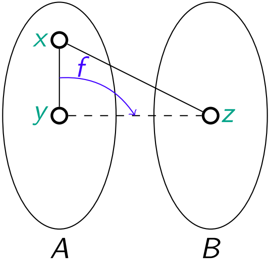
Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.
3. Trouver deux non-arêtes sans antécédent entre A et B.

Définir une orientation des arêtes internes

La f-orientation

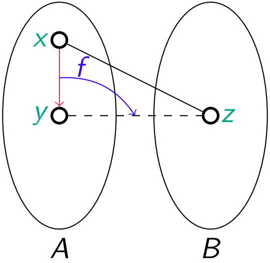
Si $f(xy) = \overline{yz}$,



Définir une orientation des arêtes internes

La f-orientation

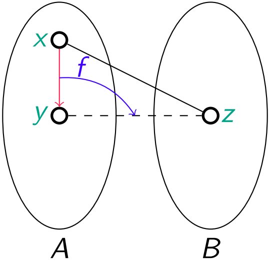
Si $f(xy) = \overline{yz}$, on oriente xy de x à y.



Définir une orientation des arêtes internes

La f-orientation

Si $f(xy) = \overline{yz}$, on oriente xy de x à y.



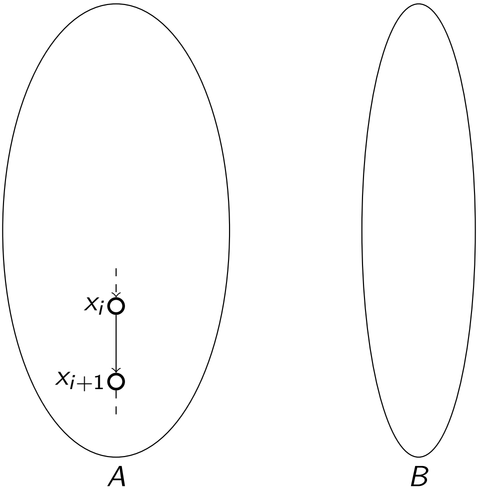
Prochaine étape

Trouver 2 non-arêtes libres en utilisant les propriétés de l'orientation.

Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

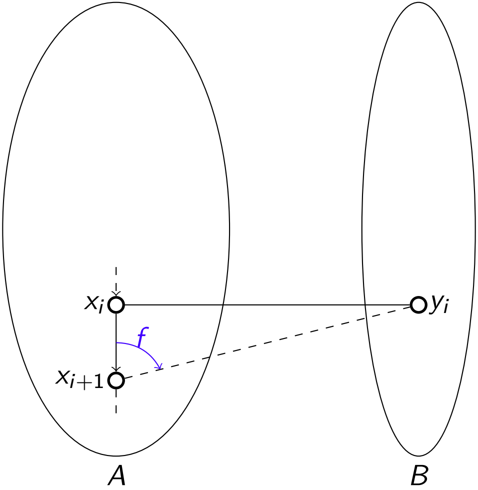
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

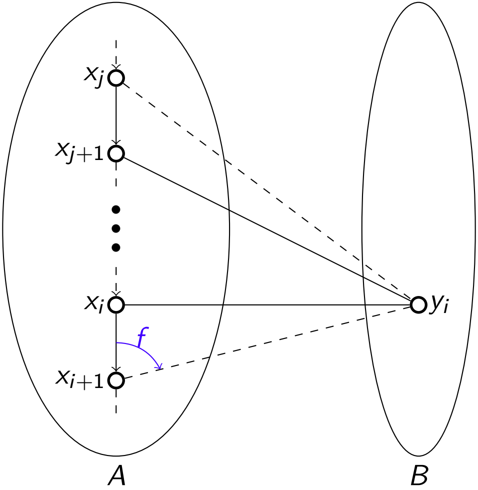
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

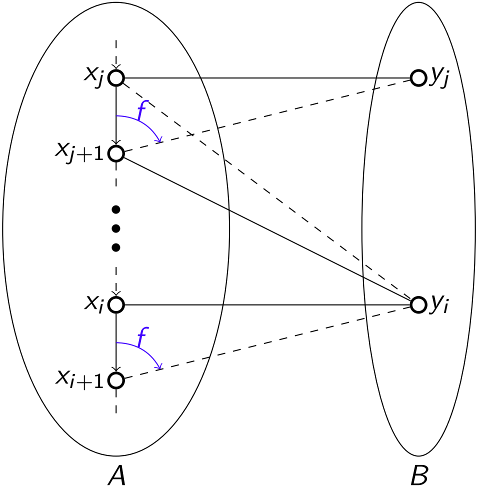
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

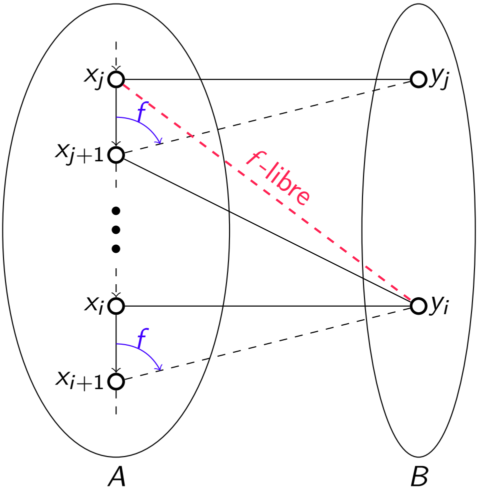
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

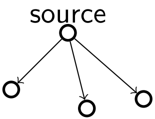
Lemme

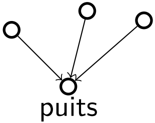
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Fin de la preuve

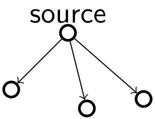
Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits

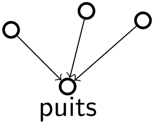




Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits



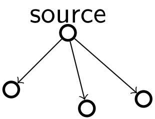


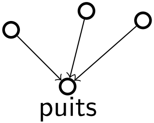
Lemme

Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits





Lemme

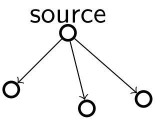
Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

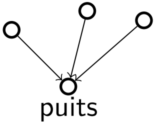
Remarque

$\Rightarrow$ Prouve Murty-Simon pour cette famille !

Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
⇒ Au moins une
source et un puits





Lemme

Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

Remarque

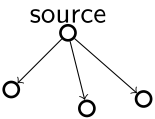
⇒ Prouve Murty-Simon pour cette famille !

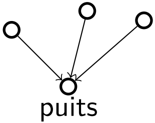
Fin de la preuve

- Au moins une source et un puits à distance au moins 3 dans une composante ⇒ Preuve terminée

Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits





Lemme

Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

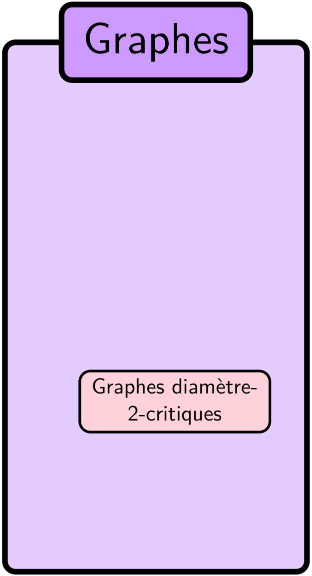
Remarque

$\Rightarrow$ Prouve Murty-Simon pour cette famille !

Fin de la preuve

- Au moins une source et un puits à distance au moins 3 dans une composante $\Rightarrow$ Preuve terminée
- Sinon $\Rightarrow$ Raffinement des propriétés pour terminer la preuve

Au final



Au final

Graphes

Graphes diamètre-2-critiques

Conclusion

- Montrer l'intérêt de renforcer la borne de Murty-Simon
- Méthode de la f-orientation potentiellement réutilisable

Au final

Graphes

Graphes diamètre-2-critiques

Conclusion

- Montrer l'intérêt de renforcer la borne de Murty-Simon
- Méthode de la f-orientation potentiellement réutilisable

Perspectives

- Améliorer la borne pour cette famille
- Étudier d'autres familles de graphes D2C

Au final

Graphes

Coloration union-distinguante

- Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau : *A Vizing-like theorem for union vertex-distinguishing edge coloring* (*Discrete Applied Mathematics*, 2017)
- BGW 2016, JGA 2016

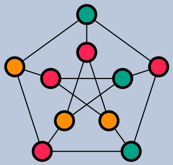
Graphes diamètre-2-critiques

- D., Foucaud, Hansberg : *Strengthening the Murty-Simon conjecture on diameter 2 critical graphs* (soumission)
- ICGT 2018

Des graphes aux jeux

Graphes

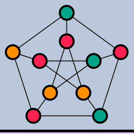
Coloration



Des graphes aux jeux

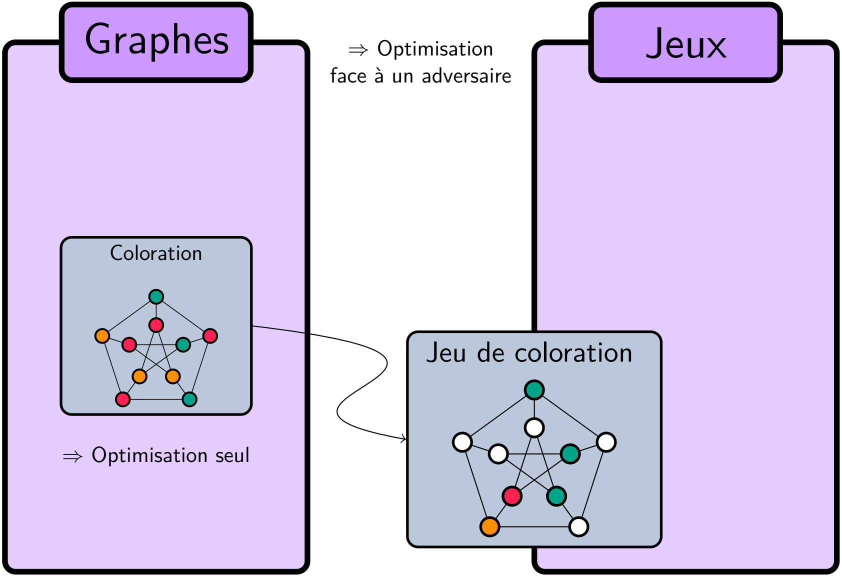
Graphes

Coloration

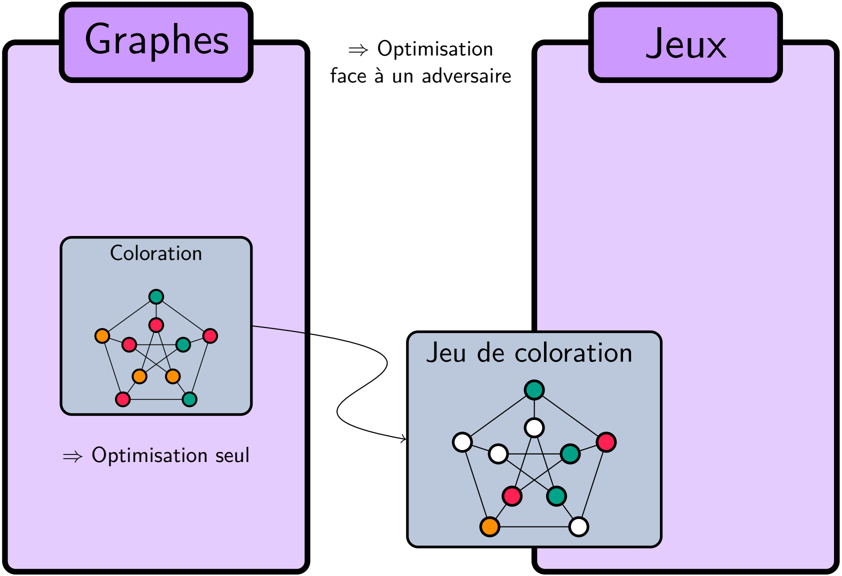


⇒ Optimisation seul

Des graphes aux jeux



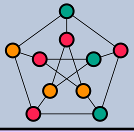
Des graphes aux jeux



Des graphes aux jeux

Graphes

Coloration

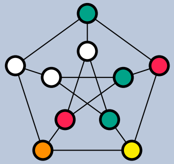


$\Rightarrow$ Optimisation seul

$\Rightarrow$ Optimisation
face à un adversaire

Jeux

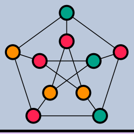
Jeu de coloration



Des graphes aux jeux

Graphes

Coloration

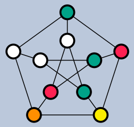


⇒ Optimisation seul

⇒ Optimisation
face à un adversaire

Jeux

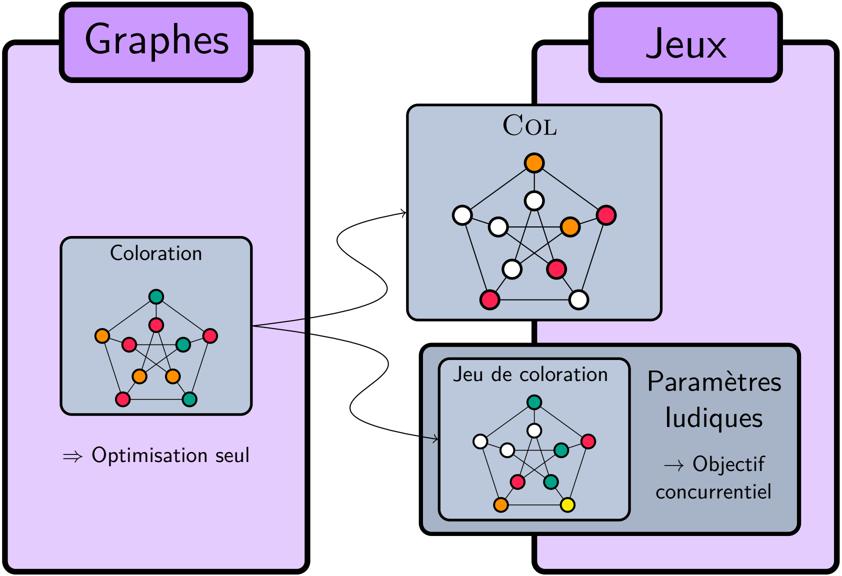
Jeu de coloration



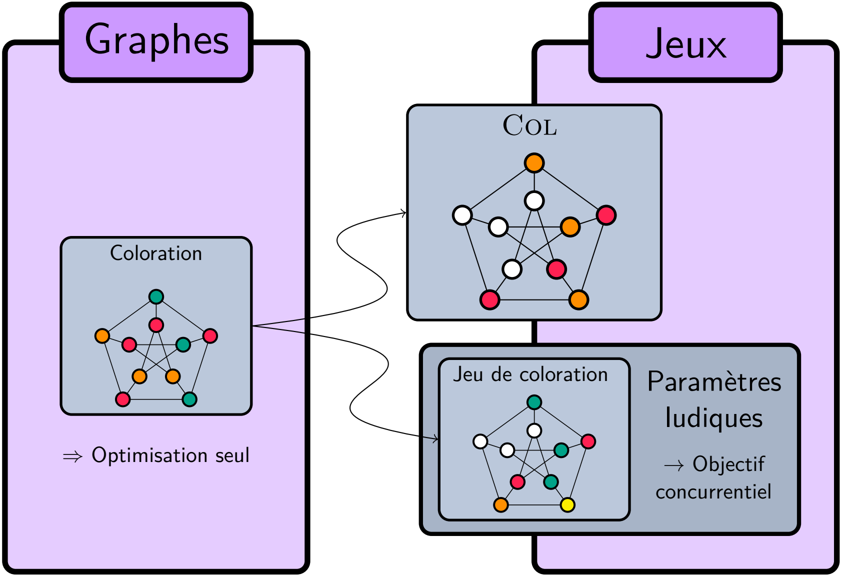
Paramètres ludiques

→ Objectif concurrentiel

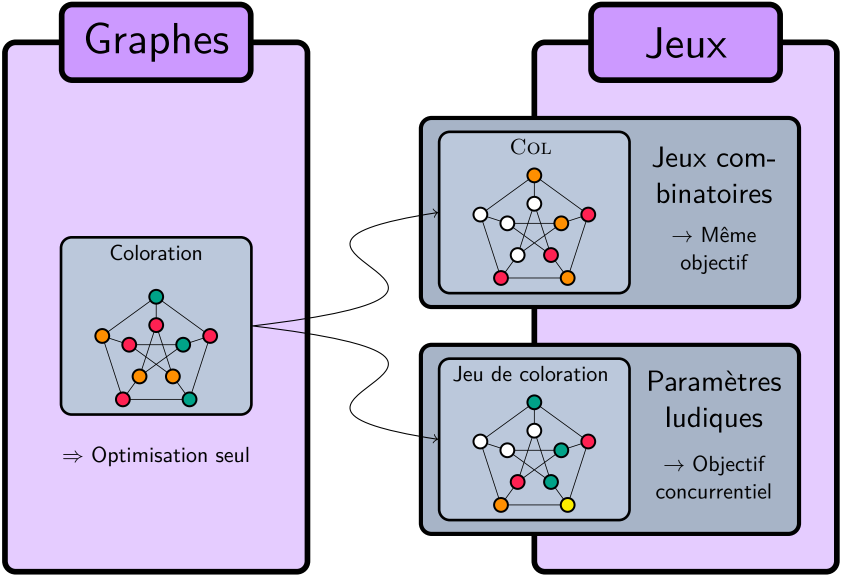
Des graphes aux jeux



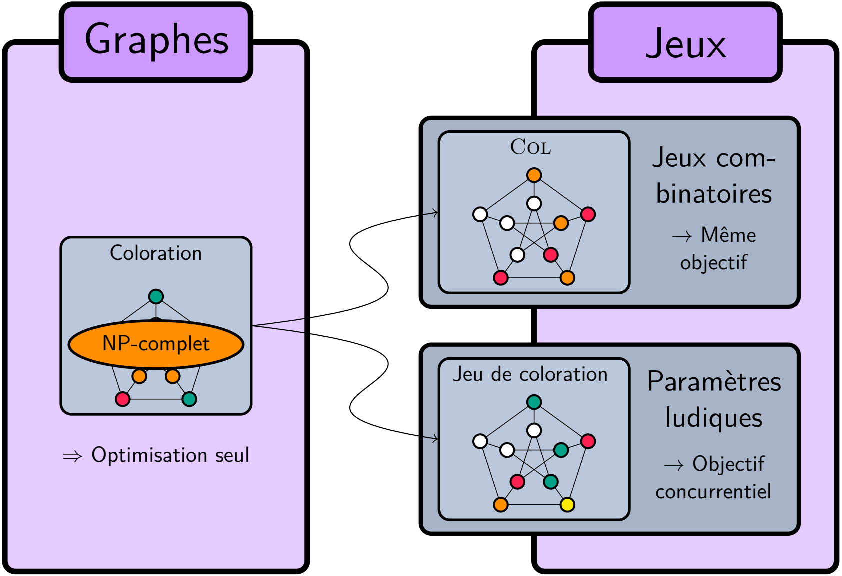
Des graphes aux jeux



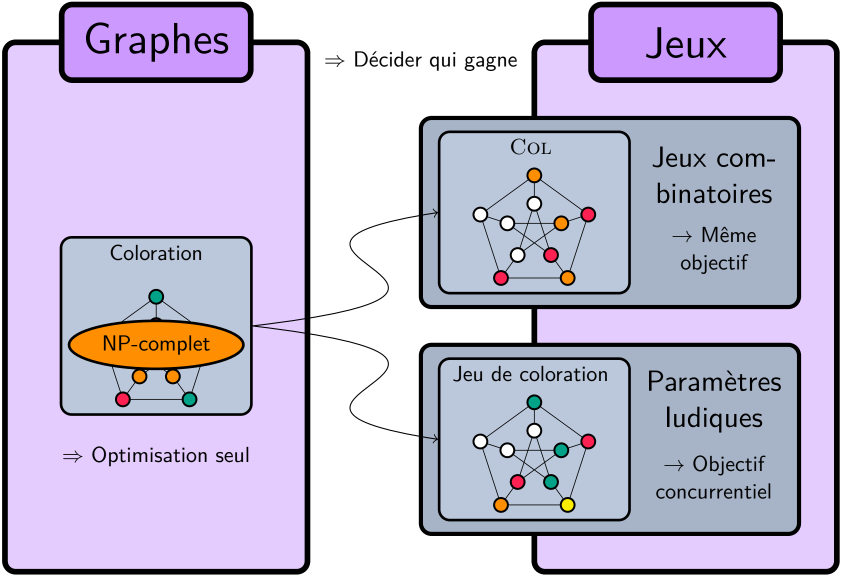
Des graphes aux jeux



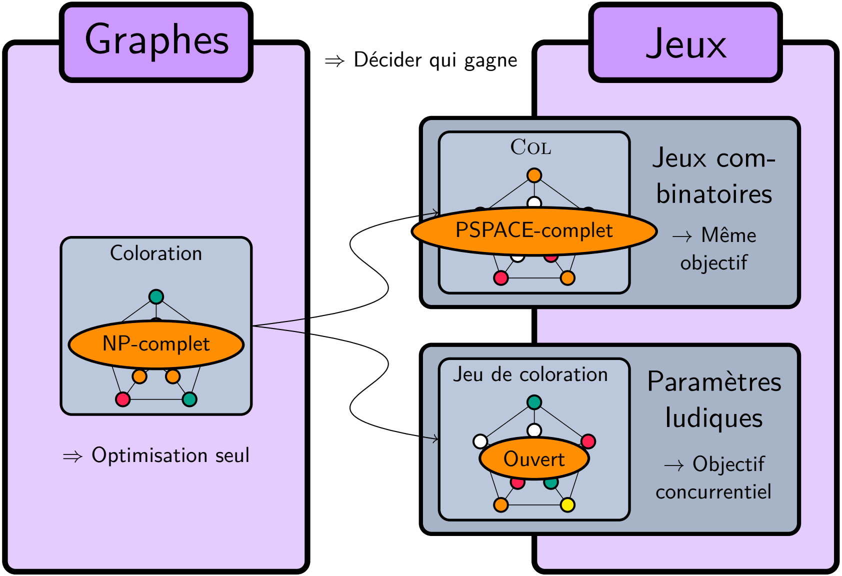
Des graphes aux jeux



Des graphes aux jeux



Des graphes aux jeux



Le chemin inverse

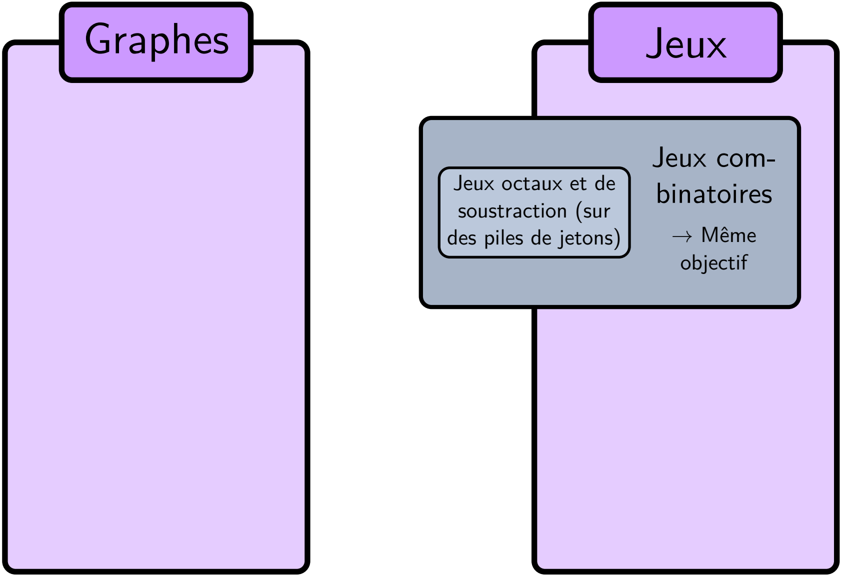
Graphes

Jeux

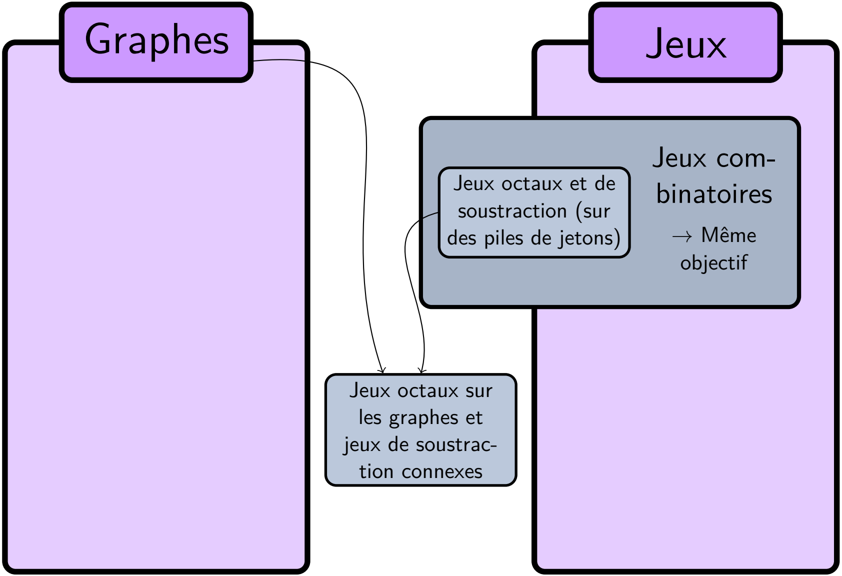
Jeux combinatoires

→ Même objectif

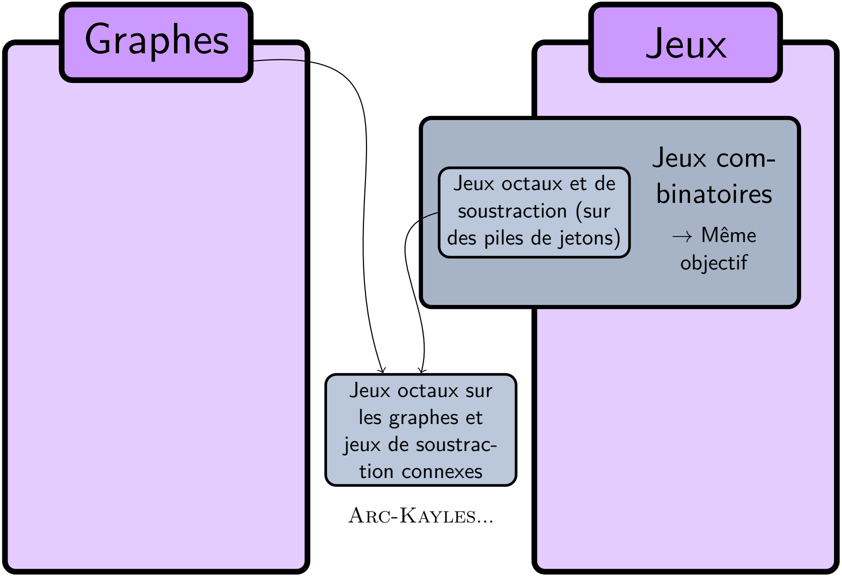
Le chemin inverse



Le chemin inverse



Le chemin inverse

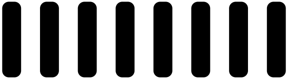


Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons

Exemple :

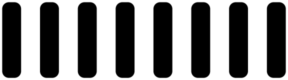


Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Exemple :



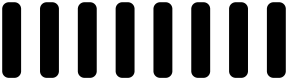
Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**



$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**

$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

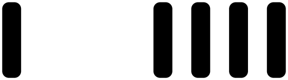
Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**



$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**

$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**

$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**

$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**

$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Jeux octaux

Jeu octal

- Sur une pile de jetons
- Un ensemble de vidage : V
- Un ensemble de soustraction : S
- Un ensemble de partition : P

Définissent un code octal

Exemple : **0.037**

$$V = S = \{2, 3\}$$
$$P = \{3\}$$

Si $P = \emptyset$ et $V = S \Rightarrow$ Jeux de soustraction

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !

Problème de décision : qui gagne ?

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{P}$(revious)

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{P}$(revious)

Séquence des issues

Séquence des issues sur une seule pile de taille $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Exemple : **0.037** $(V = S = \{2, 3\}, P = \{3\})$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Issue									

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{P}$(revious)

Séquence des issues

Séquence des issues sur une seule pile de taille $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Exemple : **0.037** ($V = S = \{2, 3\}, P = \{3\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$							

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{P}$(revious)

Séquence des issues

Séquence des issues sur une seule pile de taille $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Exemple : **0.037** ($V = S = \{2, 3\}, P = \{3\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$							

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\to \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\to \mathcal{P}$(revious)

Séquence des issues

Séquence des issues sur une seule pile de taille $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Exemple : **0.037** $(V = S = \{2, 3\}, P = \{3\})$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$					

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{P}$(revious)

Séquence des issues

Séquence des issues sur une seule pile de taille $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Exemple : **0.037** ($V = S = \{2, 3\}, P = \{3\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	

Issue d'un jeu

Jeu fini $\Rightarrow$ Toujours un gagnant !
Problème de décision : qui gagne ?

Issue

- Premier joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{N}$(ext)
- Deuxième joueur a une stratégie gagnante $\rightarrow \mathcal{P}$(revious)

Séquence des issues

Séquence des issues sur une seule pile de taille $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

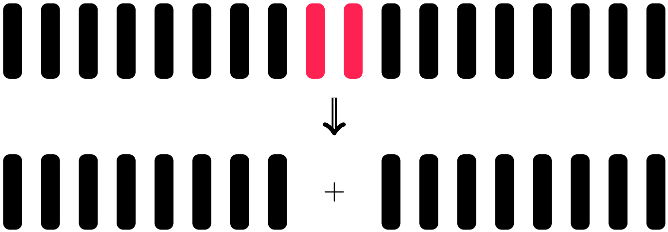
Exemple : **0.037** ($V = S = \{2, 3\}, P = \{3\}$)

Deux piles de tailles 2 et 3
$\uparrow$

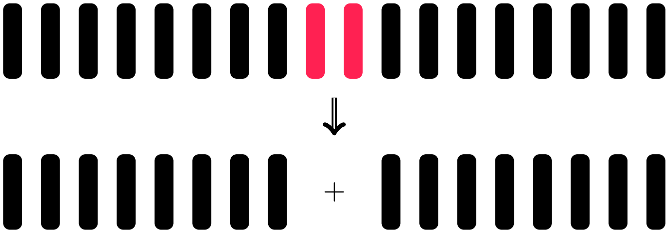
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	

Somme de jeux

Somme de jeux



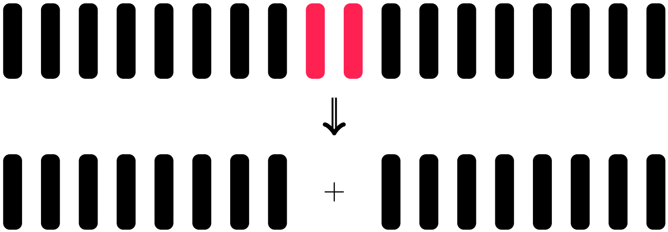
Somme de jeux



Somme

Dans $J_1 + J_2$, jouer soit sur J_1, soit sur J_2.

Somme de jeux

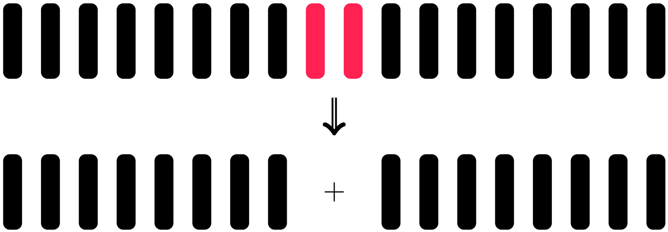


Somme

Dans $J_1 + J_2$, jouer soit sur J_1, soit sur J_2.

$+$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	

Somme de jeux

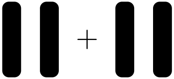


Somme

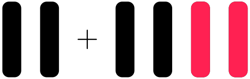
Dans $J_1 + J_2$, jouer soit sur J_1, soit sur J_2.

$+$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	?

Valeurs de Grundy

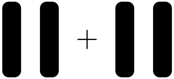


$$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{P}$$

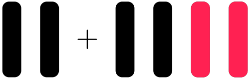


$$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$$

Valeurs de Grundy



$$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{P}$$

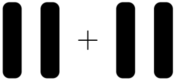


$$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$$

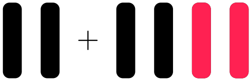
Valeur de Grundy

Classe d'équivalence de J, notée $\mathcal{G}(J)$. Raffinement de l'issue.
$\rightarrow$ Valeur entière positive

Valeurs de Grundy



$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{P}$



$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$

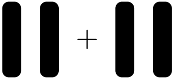
Valeur de Grundy

Classe d'équivalence de J, notée $\mathcal{G}(J)$. Raffinement de l'issue.
$\rightarrow$ Valeur entière positive

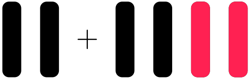
Théorème de Sprague-Grundy (1935, 1939)

$\mathcal{G}(J_1 + J_2) = \mathcal{G}(J_1) \oplus \mathcal{G}(J_2)$

Valeurs de Grundy



$$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{P}$$



$$\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$$

Valeur de Grundy

Classe d'équivalence de J, notée $\mathcal{G}(J)$. Raffinement de l'issue.
$\rightarrow$ Valeur entière positive

Théorème de Sprague-Grundy (1935, 1939)

$$\mathcal{G}(J_1 + J_2) = \mathcal{G}(J_1) \oplus \mathcal{G}(J_2)$$

Séquence de Grundy

Séquence des $\mathcal{G}(n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Régularité des jeux octaux

Régularité des jeux octaux

Théorème (Berlekamp, Conway, Guy (*Winning Ways*, 1982))

La séquence de Grundy d'un jeu de soustraction ($P = \emptyset$) est ultimement périodique.

Régularité des jeux octaux

Théorème (Berlekamp, Conway, Guy (*Winning Ways*, 1982))

La séquence de Grundy d'un jeu de soustraction ($P = \emptyset$) est ultimement périodique.

Et pour les jeux octaux ?

- **0.7** ($V = S = P = \{1\}$) : période 2
- **0.07** ($V = S = P = \{2\}$) : période 34, prépériode 68

Régularité des jeux octaux

Théorème (Berlekamp, Conway, Guy (*Winning Ways*, 1982))

La séquence de Grundy d'un jeu de soustraction ($P = \emptyset$) est ultimement périodique.

Et pour les jeux octaux ?

- **0.7** ($V = S = P = \{1\}$) : période 2
- **0.07** ($V = S = P = \{2\}$) : période 34, prépériode 68
- **0.007** ($V = S = P = \{3\}$) : pas de régularité sur 2^{28} valeurs...

Régularité des jeux octaux

Théorème (Berlekamp, Conway, Guy (*Winning Ways*, 1982))

La séquence de Grundy d'un jeu de soustraction ($P = \emptyset$) est ultimement périodique.

Et pour les jeux octaux ?

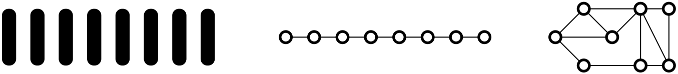
- **0.7** ($V = S = P = \{1\}$) : période 2
- **0.07** ($V = S = P = \{2\}$) : période 34, prépériode 68
- **0.007** ($V = S = P = \{3\}$) : pas de régularité sur 2^{28} valeurs...

Conjecture (Guy, 1982)

La séquence de Grundy d'un jeu octal est ultimement périodique.

Des piles de jetons aux graphes

Observation

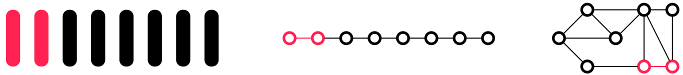


Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

Des piles de jetons aux graphes

Observation



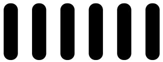
Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

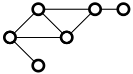
Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe

Des piles de jetons aux graphes

Observation





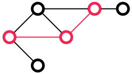
Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe

Des piles de jetons aux graphes

Observation



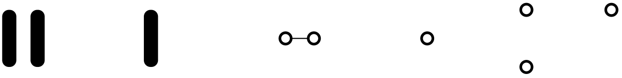
Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

Des piles de jetons aux graphes

Observation



Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

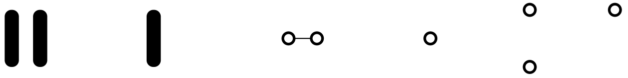
Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

$\Rightarrow$ Généricité du support de jeu

Des piles de jetons aux graphes

Observation



Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

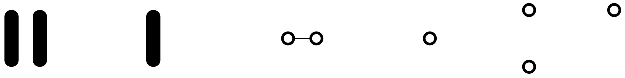
- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

$\Rightarrow$ Généricité du support de jeu

Inclut des jeux de la littérature (Arc-Kayles, Grim...)

Des piles de jetons aux graphes

Observation



Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Jeu octal sur les graphes (BCDGMPS, 2018)

- Retirer des jetons $\rightarrow$ Supprimer un sous-graphe connexe
- Diviser une pile $\rightarrow$ Déconnecter un graphe

$\Rightarrow$ Généricité du support de jeu

Inclut des jeux de la littérature (Arc-Kayles, Grim...)

Question

Comment étendre les questions de régularité aux graphes ?

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

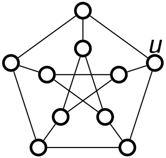
- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$?

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$ 

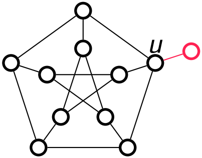
$(k = 0)$

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$ 

$(k = 1)$

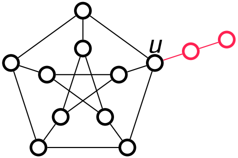
Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux → séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes → ?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$



$(k = 2)$

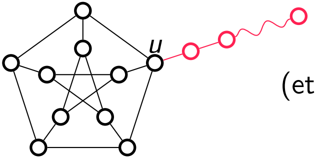
Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$$



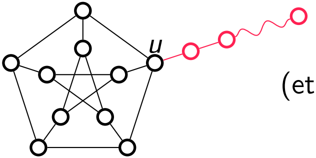
(etc)

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$  (etc)

$\rightarrow$ Approche déjà utilisée pour NODE-KAYLES (Fleischer et Trippen, 2004) et ARC-KAYLES (Huggan et Stevens, 2016)

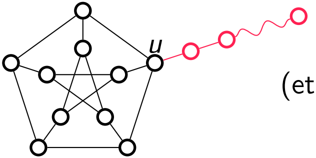
Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux → séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes → ?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$$



(etc)

→ Approche déjà utilisée pour Node-Kayles (Fleischer et Trippen, 2004) et Arc-Kayles (Huggan et Stevens, 2016)

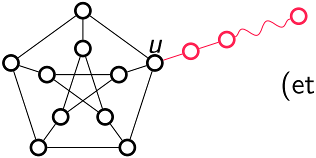
Difficile pour les jeux octaux !

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- Jeux octaux $\rightarrow$ séquence de Grundy
- Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow$?

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$ 

(etc)

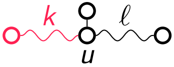
$\rightarrow$ Approche déjà utilisée pour NODE-KAYLES (Fleischer et Trippen, 2004) et ARC-KAYLES (Huggan et Stevens, 2016)

Difficile pour les jeux octaux ! $\Rightarrow$ Nous étudions les jeux de soustraction connexes (CSG(S), $P = \emptyset$, $V = S$)

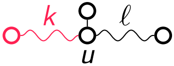
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence

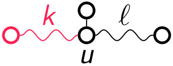
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES $V = S = \{2\}$ $P = \{2\}$			Huggan et Stevens, 2016

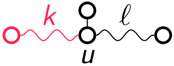
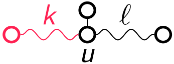
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
Arc-Kayles $V = S = \{2\}$ $P = \{2\}$		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016

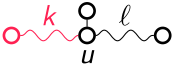
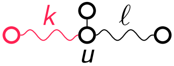
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES $V = S = \{2\}$ $P = \{2\}$		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G, tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)

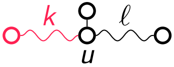
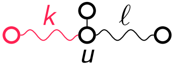
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
Arc-Kayles $V = S = \{2\}$ $P = \{2\}$		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G, tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$, $S = \{1, \ldots, N\}$	Étoile $K_{1,n}$, u sommet central	Période $N + 1$	D., Moncel, Parreau (2018+)
		Période $N + 1$ Prépériode 0 ou $N + 1$	

Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
Arc-Kayles $V = S = \{2\}$ $P = \{2\}$		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G, tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$, $S = \{1, \ldots, N\}$	Étoile $K_{1,n}$, u sommet central	Période $N+1$	D., Moncel, Parreau (2018+)
		Période $N+1$ Prépériode 0 ou $N+1$	
CSG(S) $S = \{1,2,3\}$	Toute étoile subdivisée, u sommet central ou feuille	Période $N+1=4$	D., Moncel, Parreau (2018+)
CSG(S) $S = \{1,2\}$		Période $N+1=3$	BDGMPS (2018)

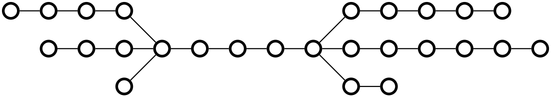
Résultats de régularité

<table>
<tr><th>Jeu</th><th>Graphe et sommet u</th><th>Régularité</th><th>Référence</th></tr>
<tr><td>Arc-Kayles
$V = S = \{2\}$
$P = \{2\}$</td><td></td><td>Ultime
périodicité
conjecturée</td><td>Huggan et
Stevens, 2016</td></tr>
<tr><td>Tout CSG
(S fini)</td><td>Tout graphe G, tout sommet u</td><td>Ultime
périodicité</td><td>D., Moncel,
Parreau (2018+)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$CSG(S)$,
$S = \{1, \ldots, N\}$</td><td>Étoile $K_{1,n}$, u sommet central</td><td>Période $N+1$</td><td rowspan="2">D., Moncel,
Parreau (2018+)</td></tr>
<tr><td></td><td>Période $N+1$
Prépériode
0 ou $N+1$</td></tr>
<tr><td>CSG(S)
$S = \{1, 2, 3\}$</td><td rowspan="2">Toute étoile subdivisée, u
sommet central ou feuille</td><td>Période
$N+1=4$</td><td>D., Moncel,
Parreau (2018+)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CSG(S)
$S = \{1, 2\}$</td><td rowspan="2">Période
$N+1=3$</td><td rowspan="2">Beaudou,
D., Gravier,
Moncel, Parreau,
Sopena (2018)</td></tr>
<tr><td>Toute biétoile subdivisée, u
sommet central ou feuille</td></tr>
</table>

CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

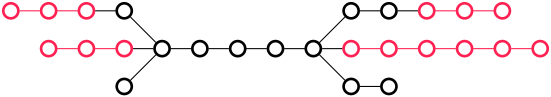
Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

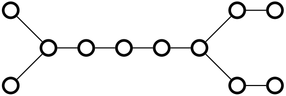
Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

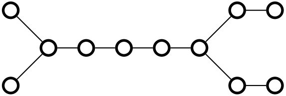


CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.

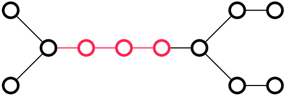


CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.

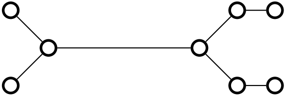


CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.

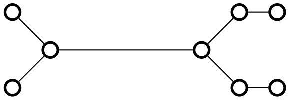


CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)

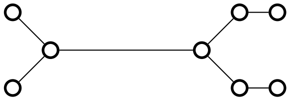
Chemins

CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

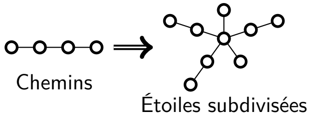
Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)

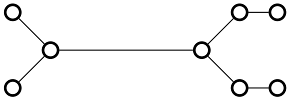


CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

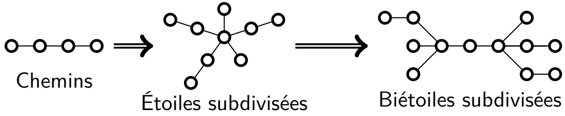
Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)

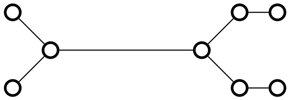


CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

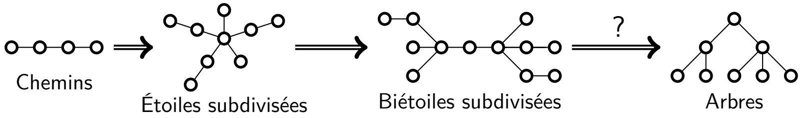
Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité $\Rightarrow$ réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



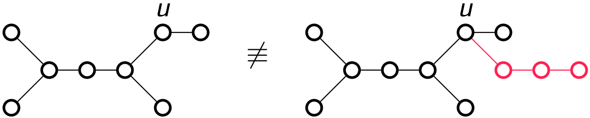
Réduction de chemins pour CSG($\{1,2\}$)



CSG($\{1,2\}$) sur les arbres ?

Proposition

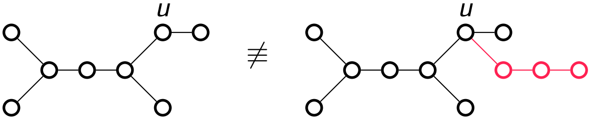
La réduction des chemins n'est pas valable pour les arbres :



CSG($\{1,2\}$) sur les arbres ?

Proposition

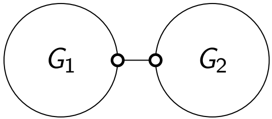
La réduction des chemins n'est pas valable pour les arbres :



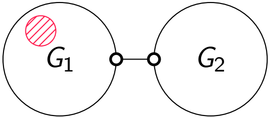
Question ouverte

Quelle période pour les arbres ?

Jeux de soustraction connexes et isthmes

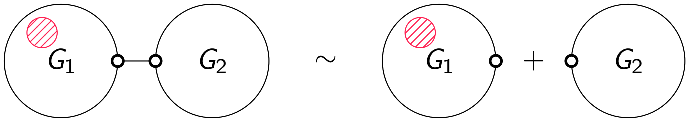


Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

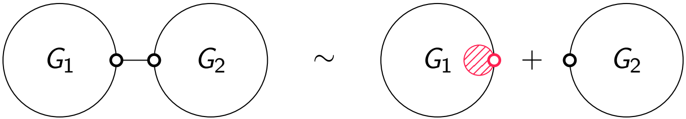
Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

Jeux de soustraction connexes et isthmes

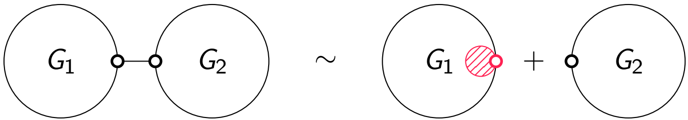


Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

Jeux de soustraction connexes et isthmes



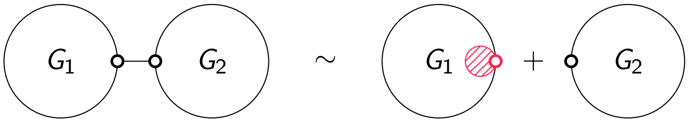
Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

Jeux de soustraction connexes et isthmes

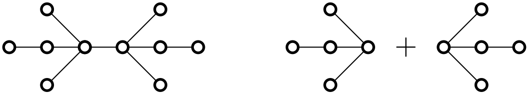


Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

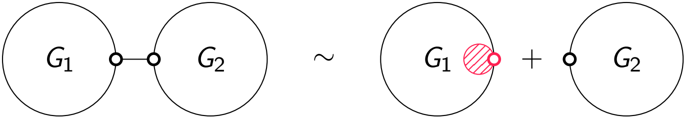
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



Jeux de soustraction connexes et isthmes

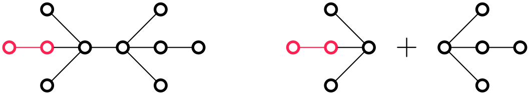


Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

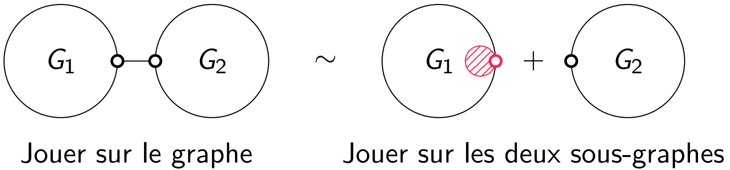
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



Jeux de soustraction connexes et isthmes

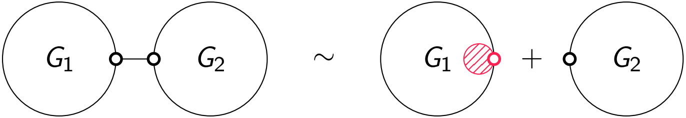


... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

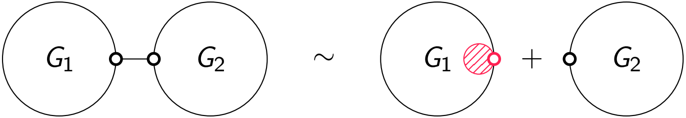
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

$\Rightarrow$ L'isthme est atteignable à la toute fin

Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

$\Rightarrow$ Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

$\Rightarrow$ L'isthme est atteignable à la toute fin

$\Rightarrow$ Deux pseudo-sommes et raffinements des valeurs de Grundy

CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 1 :

CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 1 :

	0	1	1^*	2	2^*	$2^\square$	3	$3^\square$
0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
1	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
1^*	$\oplus$	$\oplus$	2	$\oplus$	0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
2^*	$\oplus$	$\oplus$	0	$\oplus$	1	1	$\oplus$	0
$2^\square$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	1	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
3	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$3^\square$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$

où $\oplus$ est la nim-somme.

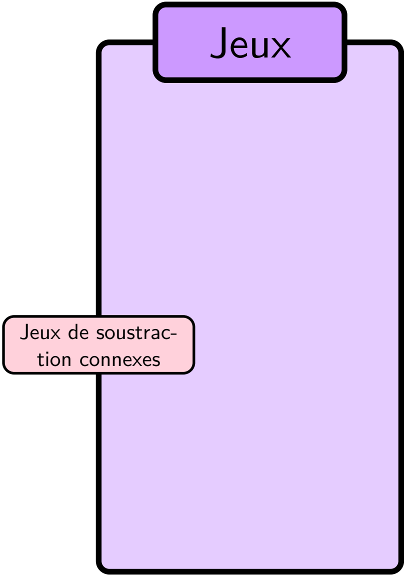
CSG($\{1,2\}$) sur les biétoiles subdivisées

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 2 :

	0	0^*	1	1^*	$1^\square$	2	2^*	$2^\square$	3	$3^\square$
0	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	2	$\oplus_1$	$\oplus$	0	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
0^*	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	2	$\oplus_1$	$\oplus_1$	0	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$
1	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	3	$\oplus_1$	$\oplus$	1	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
1^*	2	2	3	0	3	0	1	1	1	0
$1^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	3	$\oplus_1$	$\oplus_1$	1	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$
2	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	0	$\oplus_1$	$\oplus$	2	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
2^*	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
$2^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	1	$\oplus_1$	$\oplus_1$	2	0	$\oplus_1$	1
3	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	1	$\oplus_1$	$\oplus$	3	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$3^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	0	$\oplus_1$	$\oplus_1$	3	1	$\oplus_1$	0

où $\oplus$ est la nim-somme et $x \oplus_1 y$ signifie $x \oplus y \oplus 1$.

Au final



Au final

Conclusion

- Résultats de régularité
- Pseudo-somme pour les biétoiles

Jeux

Jeux de soustraction connexes

Au final

Conclusion

- Résultats de régularité
- Pseudo-somme pour les biétoiles
- Résultats pour CSG($\{2\}$), Arc-Kayles sans déconnexion

Jeux

Jeux de soustraction connexes

Au final

Conclusion

- Résultats de régularité
- Pseudo-somme pour les biétoiles
- Résultats pour CSG($\{2\}$), Arc-Kayles sans déconnexion

Perspectives

- CSG : même période sur les graphes que sur les piles ?
- Explorer d'autres familles de jeux octaux sur des graphes
- Complexité

Jeux

Jeux de soustraction connexes

Au final

- D., Duchêne, Larsson, Paris : *Partition games are pure breaking games* (soumission)

- Beaudou, Coupechoux, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena : *Octal Games on Graphs : The game 0.33 on subdivided stars and bistars* (*Theoretical Computer Science*, 2018)
- D., Moncel, Parreau : *Connected Subtraction Games on Graphs* (soumission)
- CGTC 2017

- D., Gledel, Heinrich : *A generalization of Arc-Kayles* (*International Journal of Game Theory*, 2018+)

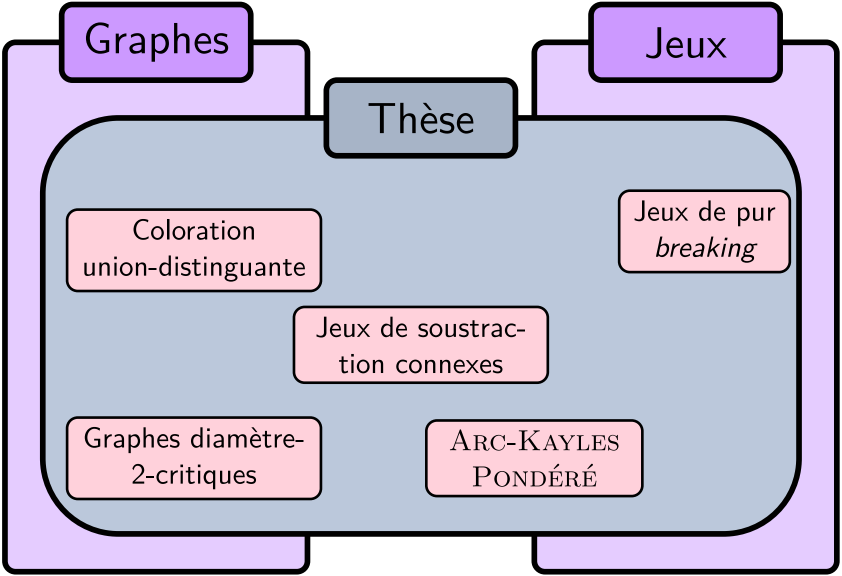
Jeux

Jeux de pur *breaking*

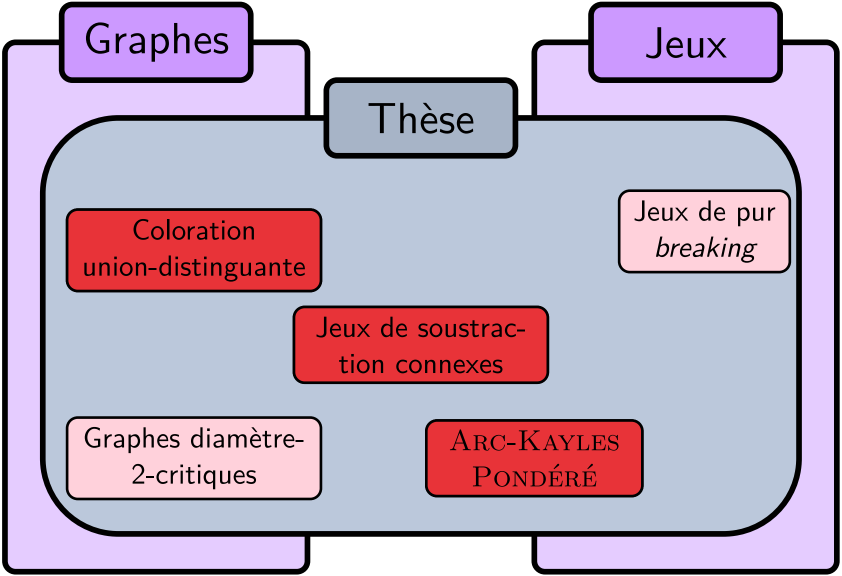
Jeux de soustraction connexes

Arc-Kayles Pondéré

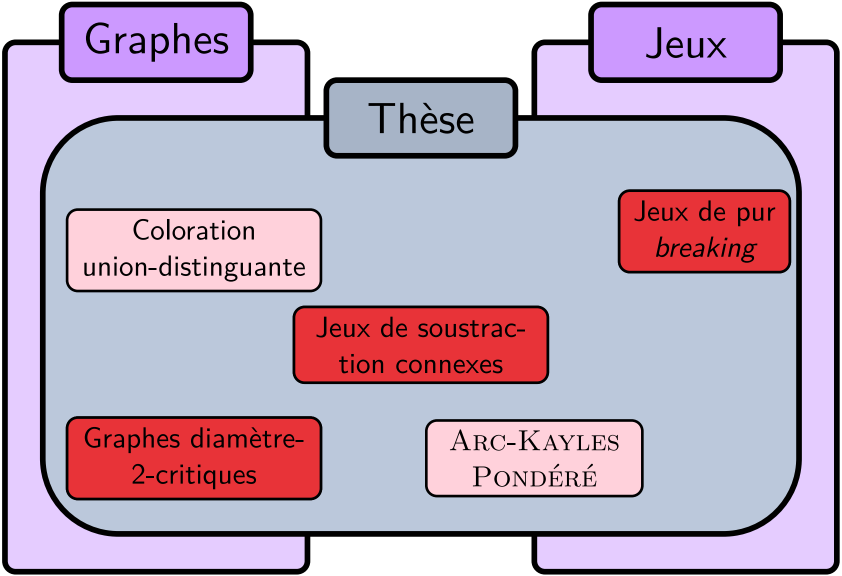
Conclusion : à l'intersection des graphes et des jeux



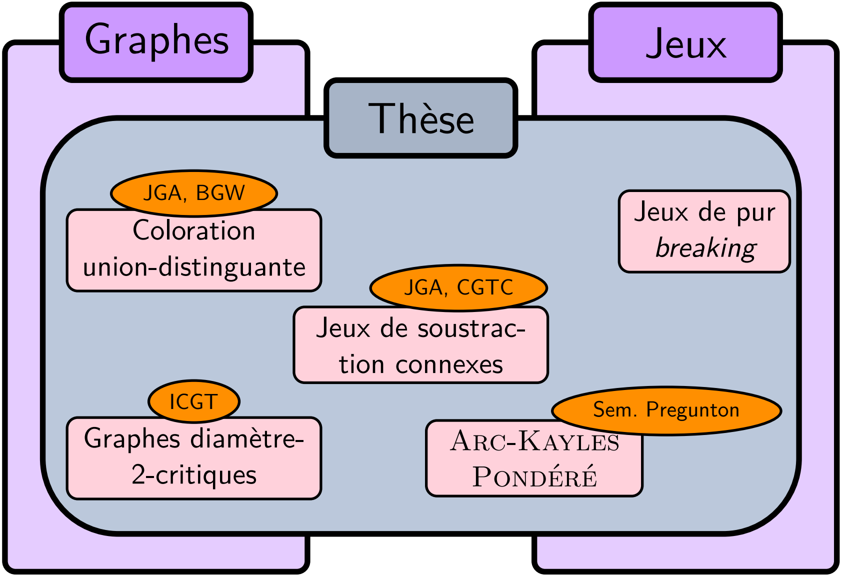
Conclusion : 3 publications



Conclusion : 3 soumissions



Conclusion : présentations nationales et internationales



Merci !

- Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau : *A Vizing-like theorem for union vertex-distinguishing edge coloring* (*Discrete Applied Mathematics*, 2017)
- Beaudou, Coupechoux, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena : *Octal Games on Graphs : The game 0.33 on subdivided stars and bistars* (*Theoretical Computer Science*, 2018)
- D., Gledel, Heinrich : *A generalization of Arc-Kayles* (*International Journal of Game Theory*, 2018+)